



**OBSERVATOIRE
INTERNATIONAL
DE LA PENSÉE
ALGÈBRIQUE**

**Le développement de la pensée algébrique
à l'école primaire et au début du secondaire
Recherches et perspectives curriculaires**

Coordonné par
Hassane Squalli
Izabella Oliveira
Alain Bronner
Mirène Larguier

Pour toute information et pour découvrir nos publications en libre accès, consultez notre site web :

<http://lel.crires.ulaval.ca>

Fonds de recherche
Nature et
technologies

Québec



Programme de développement de partenariats stratégiques en matière d'enseignement et de recherche (2017-FQ-20252)

Ce livre s'appuie sur des recherches financées par le Conseil de recherches en sciences humaines.

CRSH  SSHRC

Mise en page : David Benoit

Mise en ligne : Aude Gagnon-Tremblay

ISBN : 978-2-921559-48-5

Pour citer cet ouvrage :

Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Larguier, M. (2020). *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. Québec : Livres en ligne du CRIRES. En ligne : <https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches>

Centre de recherche et d'intervention sur la réussite scolaire ([CRIRES](#)), Québec : août 2020



Cette création est mise à disposition selon les termes de la [Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International](#)

Table des matières

Introduction

Early algebra : genèse d'un domaine de recherche, évolution et perspectives
Hassane Squalli..... 5

Chapitre 1

Conception collaborative de ressources pour l'enseignement de l'algèbre élémentaire : une entrée par les programmes de calculs
Sylvie Coppé..... 22

Chapitre 2

Les problèmes de généralisation à l'école élémentaire. Une étude française.
Floriane Wozniak..... 45

Chapitre 3

Quelles potentialités du calcul en ligne dans l'enseignement primaire en France pour favoriser une entrée précoce dans l'algèbre?
Julia Pilet et Brigitte Grugeon-Allys..... 71

Chapitre 4

Le travail sur des calculs arithmétiques comme une voie d'entrée dans l'algèbre
Valeria Borsani et Carmen Sessa..... 96

Chapitre 5

Étude de raisonnements mathématiques associés à la pensée algébrique chez les élèves avant l'introduction de l'algèbre
Doris Jeannotte et Claudia Corriveau..... 111

Chapitre 6

Raisonnements lors de la résolution de problèmes déconnectés : exemples prototypiques et analyse de productions d'élèves
Adolphe Adihou, Mirène Larguier et Alain Bronner..... 133

Chapitre 7

Caractérisation d'interventions d'un enseignant menant une activité de généralisation algébrique au premier cycle du secondaire
Catherine Bilodeau, Audrey Bolduc, Mélanie Tremblay et Mireille Saboya..... 162

Chapitre 8

Le raisonnement covariationnel comme précurseur au concept de fonction : une caractérisation des situations à caractère covariationnel présentes dans une collection de manuels scolaires du Québec destinée aux élèves de 12-14 ans
Stéphane Fontaine, Mireille Saboya et Mélanie Tremblay..... 185

Introduction

***Early algebra* : genèse d'un domaine de recherche, évolution et perspectives**

Hassane Squalli

Université de Sherbrooke

Hassane.squalli@usherbrooke.ca

Introduction

Ce livre numérique regroupe des contributions de chercheurs de différents pays¹ intéressés par le développement de la pensée algébrique à partir de l'école primaire et jusqu'au secondaire où l'avènement de l'algèbre devient explicite. Ces chercheurs sont membres de l'Observatoire International de la Pensée Algébrique (OIPA, www.oipa.education).

Connu sous le nom *early algebra* (EA), les premiers jalons de ce domaine de recherche remontent au début des années 1990 (Kieran, Pang, Schifter et Ng, 2016). Il visait à revoir en profondeur l'enseignement de l'algèbre élémentaire. Trente ans plus tard, la recherche en est encore à ses débuts. Cependant, ce domaine a déjà influencé les curricula de mathématiques de plusieurs pays (les États-Unis d'Amérique, les provinces anglophones du Canada, l'Australie, le Brésil, etc.) où le développement de la pensée algébrique commence dès les premières années de l'école primaire.

EA réfère à la fois à un domaine de recherche, une perspective curriculaire et un domaine de formation des enseignants (Carragher et Schliemann, 2007). EA est basé sur l'idée de favoriser le développement précoce de la pensée algébrique, c'est-à-dire depuis les premières années du primaire. Dans cette introduction, nous présentons le contexte d'émergence de ce mouvement, quelques étapes de l'évolution de ce jeune domaine de recherche ainsi que des questions qui font débat chez les chercheurs.

1. Genèse du mouvement *early algebra*

L'idée d'orienter l'apprentissage des mathématiques vers le développement de la pensée mathématique n'est pas nouvelle. Dès les années 70, Papert (1972) met au centre de l'enseignement des mathématiques, le développement chez les élèves de manières mathématiques de penser (*mathematical ways of thinking*). Le développement de la pensée mathématique et ses différentes formes est depuis longtemps au cœur des programmes de mathématiques. Ainsi, dans la présentation du programme de formation de l'école secondaire québécoise (Gouvernement du Québec, 2006), il est fait mention à plusieurs reprises de la notion de pensée mathématique et ses différents modes :

- Bien que les trois compétences du programme soient concrètement réunies dans **la pensée mathématique**, elles se distinguent par le fait qu'elles en ciblent différents aspects (p. 232) ;

¹ Liste des pays par ordre alphabétique représentés par des chercheurs de l'OIPA : Argentine, Belgique, Bénin, Brésil, Cameroun, Canada (Québec, Nouveaux Brunswick), France, Luxembourg, Maroc, Tunisie.

- À la fin du premier cycle du secondaire, l'élève est en mesure de faire appel aux **différents modes de pensée mathématique** afin de cerner une situation et d'émettre des conjectures (p. 244) ;
- Pour construire sa **pensée algébrique**, l'élève observe des régularités issues de situations diverses et représentées de différentes façons, comme des dessins, des tables de valeurs et des graphiques (p. 254) ;
- Dans la construction de sa **pensée probabiliste**, l'élève est initié au langage ensembliste, que l'on considère comme un outil de compréhension et de communication (p. 256) ;
- L'élève est incité à utiliser sa **pensée géométrique** et son sens spatial dans ses activités quotidiennes et différents contextes disciplinaires ou interdisciplinaires (p. 260).

Également, le développement précoce de la pensée algébrique n'est pas une idée nouvelle. En Chine et en Russie, par exemple, des concepts algébriques sont introduits à l'école primaire depuis les années 1950 et 1960 (Cai et Howson, 2012). Dans les discussions au niveau international, cette idée est reprise par plusieurs chercheurs, à partir de la fin des années 1980 (Bodanskii, 1991 ; Davis, 1989 ; Kaput, 1995 ; Vergnaud, 1988).

Dans l'enseignement traditionnel de l'algèbre, celle-ci est vue comme une « arithmétique généralisée » ; elle traite des quantités et des opérations permises sur ces quantités, et ses règles sont dictées par les propriétés bien connues de l'arithmétique quantitative (Pycior, 1984). Voici comment un manuel scolaire datant des années 1920 explique le but de l'algèbre :

Le but de l'algèbre est la simplification et la généralisation des questions sur les nombres. La simplification résulte de l'emploi de signes pour indiquer les opérations, et de lettres pour désigner les nombres cherchés. La généralisation résulte de l'emploi de lettres pour représenter les nombres donnés » (Vacquant et Macé de Lépinay, 1922, p. 5).

Afin de comprendre comment l'enseignement de l'algèbre peut s'appuyer sur l'expérience qu'ont les élèves en arithmétique, de nombreuses recherches ont été menées sur les ressemblances et les différences qui existent entre l'arithmétique et l'algèbre. Mais le passage pour les élèves d'un mode de pensée arithmétique à un mode de pensée algébrique est loin d'être facile à réaliser et pose problème (Kieran, 1992 ; Rojano, 1996 ; Vergnaud, Cortes et Favre-Artigue, 1988). Jusqu'à la fin des années 1980, la plupart des recherches en didactique de l'algèbre étaient principalement centrées sur l'étude des difficultés d'apprentissage rencontrées par les élèves lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre. Dans leur article synthèse, Carraher et Schliemann (2007) présentent des exemples de telles difficultés documentées par la recherche :

- Les élèves voient le signe d'égalité comme un signe d'annonce de résultats (Booth, 1984 ; Kieran, 1981 ; Vergnaud, 1985 ; Vergnaud, Cortes et Favre-Artigue, 1988) ;
- Ils ont tendance à rechercher une valeur numérique simple (Booth, 1984). Le refus de laisser les opérations en suspens conduit à des erreurs de concaténation (Bednarz et Janvier, 1996) ;
- Ils ne reconnaissent pas les propriétés de commutativité et de distributivité (Boulton-Lewis *et al.*, 2001 ; Demana et Leitzel, 1988 ; MacGregor, 1996) ;

- Ils n'utilisent pas des symboles mathématiques pour représenter des relations entre des quantités (Bednarz, 2001 ; Bednarz et Janvier, 1996 ; Vergnaud, 1985 ; Wagner, 1981) ;
- Ils ne savent pas utiliser les lettres comme nombres généralisés ou comme variables (Booth, 1984 ; Kuchemann, 1981 ; Vergnaud, 1985) ;
- Ils ont des difficultés à opérer sur les inconnues ; et ils n'arrivent pas à comprendre les règles de transformation d'une équation en une équation équivalente (Bednarz, 2001 ; Bednarz et Janvier, 1996 ; Filloy et Rojano, 1989 ; Kieran, 1989 ; Steinberg, Sleeman et Ktorza, 1990).

Différentes interprétations des sources de ces difficultés sont proposées. Selon Booth (1984), les longs apprentissages qu'ont réalisés les élèves en arithmétique viennent faire obstacle à leur apprentissage de l'algèbre. Par exemple, dans la résolution d'un problème se ramenant à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue, les élèves ont de la difficulté à opérer sur l'inconnue - surtout quand celle-ci figure dans les deux membres de l'équation - et recourent à une méthode d'essais-erreurs. Selon Filloy et Rojano (1989), cette difficulté est la manifestation d'une *coupure didactique* le long de la ligne d'évolution d'une pensée arithmétique à une pensée algébrique.

Pour sa part, Vergnaud (1988) évoque une double rupture épistémologique lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre. Une opposition des caractéristiques de la résolution arithmétique à celles de la résolution algébrique, d'une part. Et, d'autre part, une opposition des modes d'appréhension des écritures algébriques et numériques (statut du signe d'égalité, statut des lettres) ainsi que des modes de contrôle dans la transformation des écritures. Kieran (1992, 1994) avance qu'entre l'arithmétique et l'algèbre résident à la fois de fausses continuités et des discontinuités. Les fausses continuités résident dans l'utilisation des mêmes symboles et signes pour représenter le signe d'égalité et les opérations, mais avec des interprétations différentes. Les discontinuités sont reliées à la mise en œuvre de démarches de résolution distinctes, à l'utilisation de nouveaux objets, voire la mise en jeu de conceptions structurales et non plus procédurales des objets, à la représentation formelle des problèmes par des équations et à l'utilisation de procédures formelles nouvelles pour les résoudre.

Plusieurs critiques sont adressées à l'algèbre scolaire. Une des plus virulentes est celle de Kaput (1995) :

L'algèbre scolaire aux États-Unis est institutionnalisée comme deux ou plusieurs cours hautement redondants, isolés des autres matières, introduits brusquement aux étudiants post-pubères, et souvent répétés à grands frais comme des mathématiques de rattrapage au niveau secondaire. Leur contenu a évolué au cours de l'histoire pour aboutir à la manipulation de chaînes de signes alphanumériques guidée par diverses règles et conventions syntaxiques, parfois interrompues par des « applications » sous la forme de problèmes courts présentés dans des textes hautement stylisés. [...] L'effet net est une aliénation tragique des mathématiques pour ceux qui survivent à ce filtre et une perte encore plus tragique de possibilités de vie pour ceux qui ne survivent pas. (p. 71, traduction libre)

Cette insatisfaction face à l'état de l'enseignement de l'algèbre à l'école a conduit les didacticiens des mathématiques, depuis la fin des années 1980, à envisager sérieusement la réforme des curriculums scolaires d'algèbre. C'est ainsi que l'on a vu se multiplier les travaux de recherche à ce sujet (Kaput, 1995) ; Kieran, 1992) ; Lins, 1992) ; Wheeler, 1989). De nombreux forums scientifiques ont aussi été organisés pour en discuter, notamment à l'occasion des Congrès internationaux sur l'enseignement des mathématiques (ICMI) et des rencontres des groupes PME et PME-NA. Ce mouvement international a conduit à la reconceptualisation de l'enseignement de l'algèbre à l'école en mettant l'accent sur le développement de la pensée algébrique bien avant l'introduction de l'algèbre au secondaire.

Le *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM)² a été partie prenante des efforts menant à la reconceptualisation de l'algèbre enseignée à l'école. En 1994, le NCTM a mis sur pied un groupe de travail sur l'algèbre *Algebra Working Group* (AWG) avec le mandat de produire un document qui propose une vision élargie de l'algèbre pour tous, commençant par des expériences au début du primaire et se prolongeant jusqu'au secondaire (Algebra Working Group [AWG], 1997). L'AWG était constitué d'une dizaine de personnes, mathématiciens, enseignants et chercheurs en éducation mathématique. En 1994, il a produit un premier document, qui a été révisé en 1995 et en 1997. Dans son document, l'AWG précise que les thèmes sur lesquels ont été basées les transpositions didactiques antérieures n'ont pas cessé de changer suivant les époques. Ainsi, explique-t-il :

² Le *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) est la plus importante association d'enseignants de mathématiques en Amérique du Nord qui met de l'avant cette vision du *early algebra*. Elle exerce une influence déterminante sur les curricula de mathématiques de tous les États des États-Unis ainsi que des provinces canadiennes anglophones. Elle dispose de moyens très importants en termes de publications professionnelles et scientifiques et d'innombrables ressources en ligne pour les enseignants, les élèves et les parents ; et de rencontres professionnelles et scientifiques dans l'espace nord-américain. Depuis la fin des années 1980, cette association se donne comme mission de proposer, tous les dix ans, des principes et des normes en matière de mathématiques à enseigner à l'école (de la maternelle à la 12^e année).

The «new math» of the 60's was based on structure. This was followed by a «back to the basics» movement, based heavily on thinking of algebra as a language. In the 90's with the emergence of the graphing calculator, the concepts of function and modeling have become the central point for conceptualizing algebra (AWG, 1997, p. 9).

Pour l'AWG, « algebra is a way of thinking about and representing many situations. It has a language and a syntax, along with tools and procedures that promote this thinking and modeling » (AWG, 1997, p. 19). Les auteurs du document d'AWG proposent d'organiser le curriculum d'algèbre à l'école selon quatre *thèmes organisateurs* : Fonctions et relations, Structure, Modélisation et, Représentation et langages.

À propos du thème *Fonctions et relations*, les auteurs écrivent :

The central mathematical concept of function and its variant, a mathematical relation underlies the equations, tables, and graphs so common to algebra. Functions, and the related concept of variable, give organized ways of thinking about an enormous variety of mathematical settings (AWG, 1997, p. 16).

En ce qui concerne les thèmes *Structure et modélisation*, les auteurs emploient le terme structure dans deux sens différents : 1) pour signifier une structure algébrique ou 2) pour signifier la structure d'une situation mathématique (modèle, une régularité, etc.). En ce qui concerne le thème *Représentation et langages* les auteurs expliquent que « algebra can be seen as a language – with its various “dialect” of literal symbols, graphs, and tables. For instance, algebra can be seen as a language for generalizing arithmetic » (AWG, 1997, p. 10).

Les recommandations d'AWG se traduisent dans les propositions du NCTM *Principles and Standards for School Mathematics* de 2000 par l'apparition d'un nouveau domaine de contenu *Patterns, Functions, and Algebra* valable de la maternelle à la 12^e année³. Quatre objectifs généraux sont associés à ce domaine de contenu. Ils sont énoncés comme suit :

Mathematical instructional programs should include attention to patterns, functions, symbols, and models so that all students

- understand various types of patterns and functional relationships ;
- use symbolic forms to represent and analyze mathematical situations and structures ;
- use mathematical models and analyze change in both real and abstract contexts.

(NCTM, 2000, p. 56)

Rappelons quelques résultats d'une analyse détaillée de la présentation de ce domaine de contenu (Squalli, 2000).

Le NCTM propose dans son document une progression du développement de la pensée algébrique de la maternelle à la 12^e année. L'étude des *patterns*, des fonctions et de l'algèbre doit, estimer les

³ Les quatre autres domaines de contenu sont : *Number and Operations* ; *Geometry and Spatial Sense* ; *Measurement* ; *Data Analysis, Statistics, and Probability* (NCTM, 2000).

auteurs des *Principles and Standards* de 2000, commencer de manière informelle dès la maternelle et progresser en se sophistiquant et en s'approfondissant tout au long du cursus. Il apparaît que ces auteurs considèrent la période allant de la maternelle à la 2^e année comme une phase préliminaire d'exploration de concepts algébriques et de développement d'un langage pour représenter et décrire des généralités (règles, régularités, etc.). Aux niveaux allant de la 3^e à la 5^e année, selon les auteurs, les élèves développent des idées algébriques quand ils construisent ou identifient des *patterns* numériques ou géométriques, décrivent verbalement des *patterns* et les représentent à l'aide de tableaux ou symboles, cherchent et appliquent des relations entre des quantités qui varient pour faire des prédictions, élaborent des généralisations (ou règles) et les vérifient, utilisent des graphes pour décrire des *patterns* et faire des prévisions, ainsi que pour explorer des propriétés numériques. Les élèves explorent aussi la notion de variable et commencent à l'utiliser comme *marque place*⁴ pour représenter une inconnue ou une quantité qui varie. À la fin de ce niveau, les élèves sont encouragés à utiliser des lettres pour représenter une variable dans un contexte de généralisation :

As students explore patterns and note relationships, they should be encouraged to represent their thinking. At first this can be with words ("multiplying the number of cubes by 4 and adding 2 gives the surface area of the tower"), and later students can also record a pattern by using informal or formal variable notation, $4 \times N + 2 = S$. Variable notation is an especially important tool as students begin to work with generalizations. (NCTM, 2000, p. 167)

Également, à ce niveau d'étude, les élèves sont amenés à découvrir les règles du calcul algébrique (propriétés des opérations et transformations algébriques) valides dans les systèmes classiques de nombres, par des généralisations à partir de cas particuliers numériques ou par l'utilisation de modèles géométriques. L'introduction du calcul littéral de l'algèbre commence véritablement au niveau allant de la 6^e à la 8^e année (école moyenne). Le langage algébrique formel est exploité dans la résolution d'équations linéaires. En effet, soulignent les auteurs :

It is essential that students become proficient in working with simple algebraic expressions, including generating equivalent expressions and using and evaluating simple formulas. By the end of the middle grades, students should be able to solve linear equations in several ways, with or without a calculator, as appropriate. (NCTM, 2000, p. 221)

De la 9^e à la 12^e année, les objectifs généraux visés en algèbre sont bien plus ambitieux qu'aux niveaux précédents (calcul polynomial, structures algébriques, introduction des calculs vectoriel, matriciel (soutenus par la technologie pour les calculs complexes), etc.

Les *Principles and Standards* de 2000 du NCTM ont une influence déterminante sur les curriculums de mathématiques de tous les états des États-Unis ainsi que des provinces canadiennes anglophones et ont créé un effet d'entraînement vers la mise en œuvre de curricula de type *early algebra* dans plusieurs

⁴ Placeholder.

pays. Depuis les années 2000, nous assistons à l'émergence de programmes de mathématiques de différents pays, visant de manière explicite le développement précoce de la pensée algébrique, c'est-à-dire depuis le début du primaire. C'est le cas par exemple du programme-cadre de l'Ontario (Squalli, Mary et Marchand, 2011) mis en œuvre au début des années 2000 ainsi que le tout récent programme du Brésil (Oliveira, 2018).

La perspective du développement précoce de la pensée algébrique est devenue une préoccupation importante dans la communauté de recherche en didactique des mathématiques depuis la fin des années 1990. En 2001, à l'issue de la rencontre de préparation de la 12^e étude ICMI : *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Chick, Stacey, Vincent et Vincent, 2001 ; Lins et Kaput, 2004 ; Stacey, Chick et Kendal, 2006), un groupe de travail spécial sur la pensée algébrique est créé (Carragher et Schliemann, 2007). Parmi les thèmes de réflexions, on trouve : *Why Algebra? What Algebra? Early Algebra. Teachers' knowledge for Teaching Algebra.*

2. Questions qui font débat dans la communauté de recherche *early algebra*

Dès la formulation de l'idée du développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage littéral de l'algèbre, sur une longue période débutant dès les premières années du primaire, plusieurs questions importantes se posent naturellement : Qu'entend-on par algèbre ? Qu'entend-on par pensée algébrique ? Est-ce que les élèves du primaire peuvent développer une pensée algébrique ? Est-ce que les enseignants du primaire peuvent développer la pensée algébrique chez leurs élèves ? Quelle est la relation entre l'arithmétique et l'algèbre ? Quel est le rôle des signes alphanumériques dans le développement de la pensée algébrique ?

Comme le montrent plusieurs chapitres de ce livre, il ne fait maintenant aucun doute chez les chercheurs de ce mouvement que les élèves du primaire sont capables de penser algébriquement (voir aussi par exemple, Carragher et Schliemann, 2007 ; Squalli et Bronner, 2017 ; Squalli Bronner, Larguier et Adihou, 2020). La formation des enseignants du primaire au développement de la pensée algébrique est sans aucun doute un enjeu important (voir par exemple Cai et Knuth, 2011 ; Cooper et Warren, 2011 ; Demonty, Vlassis et Fagnant, 2018 ; Kaput et Blanton, 2005). Les questions sur la nature de l'algèbre et de la pensée algébrique, de la relation entre l'algèbre et l'arithmétique ainsi que du rôle des signes alphanumériques dans la caractérisation de la pensée algébrique font encore débat chez les chercheurs. Nous présentons notre point de vue sur ces questions à partir de nos propres recherches.

2.1. Qu'entend-on par algèbre et par pensée algébrique ?

Les mathématiques peuvent être considérées comme une science toute faite, c'est-à-dire un ensemble de connaissances déjà bien organisées, ou encore comme une science en train de se faire, c'est-à-dire comme une activité humaine. Selon cette seconde perspective, l'algèbre est un domaine particulier d'activités mathématiques. La pensée algébrique est une manière mathématique de penser dans ce type d'activités.

Une analyse du développement historique de l'algèbre élémentaire nous a permis d'approcher l'algèbre élémentaire comme un ensemble d'activités mathématiques où interviennent des *opérations*

(lois de composition, internes ou externes, binaires ou n-aires), pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, rotation, composition, etc.), mais répétées un nombre fini de fois (Squalli, 2000).

Si l'arithmétique peut être définie comme la science des nombres, des quantités et des grandeurs (Carragher et Schliemann, 2007), l'algèbre peut être définie comme la science des opérations (dans le sens défini précédemment).

Sur le plan opératoire la pensée algébrique se déploie au moyen de, 1) un ensemble de raisonnements particuliers, comme généraliser, raisonner de manière analytique, symboliser et opérer sur des symboles ; raisonner sur des relations entre variables, en particulier des relations fonctionnelles ; raisonner en termes de structures, etc. ; 2) des manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques, comme traiter l'égalité comme une relation d'équivalence ; laisser les opérations en suspens ; voir une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calcul ; etc. et ; des modes de représentation et des manières d'opérer sur ces représentations (Squalli, 2015).

Dans cette conceptualisation, le caractère algébrique de la pensée ou de l'activité mathématique ne réside pas dans la nature des ostensifs, au sens de Bosch et Chevallard (1999), soit dans la présence de signes alphanumériques. Il réside plutôt dans la nature des non ostensifs, soit dans les significations des concepts ainsi que dans la nature des raisonnements impliqués. Dans ce sens et de manière plus précise selon Radford (2018), la pensée algébrique recourt à des quantités indéterminées traitées de manière analytique et à des modes idiosyncratiques ou spécifiques, culturellement et historiquement évolués, pour représenter / symboliser ces quantités indéterminées et leurs opérations. Cette caractérisation de la pensée algébrique permet de distinguer cette dernière d'une pensée arithmétique. En effet, plusieurs auteurs insistent sur le caractère analytique de la pensée algébrique (Adihou *et al.*, chapitre 6 de ce livre ; Bednarz, Janvier, Mary et Lepage, 1992 ; Filloy et Rojano, 1989 ; Lins, 1992 ; Squalli, 2000 ; Squalli *et al.*, 2020).

Dans le contexte de la résolution de problèmes, raisonner analytiquement consiste à opérer sur l'inconnue comme si c'était un nombre connu, procédant ainsi de l'inconnu vers le connu. En revanche, la pensée arithmétique est de nature non analytique. Comme le font remarquer Mason et Binns (1993), dans une démarche arithmétique de résolution on fait simplement une suite de calculs sur des quantités connues, on n'opère jamais sur des inconnues. La distinction entre un mode de raisonnement arithmétique et un mode de raisonnement algébrique réside précisément dans le caractère analytique de ce dernier, non dans l'absence ou la présence de lettres pour représenter les inconnues. (Squalli *et al.*, 2020, p. 39)

Dans leur texte, ces auteurs présentent un cadre d'analyse des raisonnements pouvant être mobilisés dans la résolution de problèmes se ramenant à la résolution d'équations linéaires, selon le degré d'analyticité des raisonnements et la nature des registres sémiotiques de représentation utilisées. Dans le chapitre 6, Adihou Languier et Bronner, s'appuyant sur le cadre d'analyse de Squalli *et al.* (2020), montrent des exemples de raisonnements analytiques d'élèves dans un registre purement numérique ainsi que de

raisonnements non analytiques bien que des lettres soient utilisées comme dénotation des inconnues – mais sans opérations sur ces dénotations. Dans le cas d’activités de généralisation de *patterns* figuratifs, plusieurs recherches montrent que les élèves du primaire et du début du secondaire peuvent produire des généralités algébriques sans recourir aux lettres (Mary, Squalli et Schmidt, 2014 ; Radford, 2014 ; Squalli, 2015 ; Vlassis, Demonty et Squalli, 2017). Les chapitres 2 et 6 de ce livre en présentent quelques exemples.

2.2. La place des signes alphanumériques dans la caractérisation de la pensée algébrique

Dans notre conceptualisation de l’algèbre, ainsi que dans celles d’autres auteurs (Lins, 1992 ; Mason *et al.*, 1985 ; Radford, 2018), les signes alphanumériques ne sont pas essentiels ni caractéristiques de la pensée algébrique. Par exemple, selon Mason, Graham, Pimm et Gowar (1985), «symbolization based on alphanumeric signs — is not required to start thinking algebraically : “Full symbolization should only come much later” » (p. 24).

D’autres chercheurs du domaine *early algebra* ont une position théorique différente. Pour eux, l’utilisation des signes alphanumériques est requise pour qu’une activité soit déclarée algébrique. Ainsi, Kaput *et al.* affirment « activities in which generalization is expressed through other symbol systems are not considered genuinely algebraic : they are termed “quasi-algebraic” » (2008, p. 49, cite par Radford, 2018, p. 5). Pour sa part, Bell (1993) interprète la pensée algébrique telle que Lins (1992) l’a définie dans sa thèse comme une pensée permettant de résoudre des problèmes arithmétiques complexes en travaillant d’une manière flexible avec des relations dans le système des nombres rationnels ou réels. Selon lui, une telle forme de pensée existe certainement et Lins l’a montré par une analyse effective de solutions d’élèves ; cependant, ajoute-t-il : « I would prefer (...) to call this complex arithmetic problem-solving, and to reserve the term Algebraic for cases in which symbolism is used » (Bell, 1993).

Or, cette position théorique est intenable du point de vue du développement historique de l’algèbre élémentaire (Radford, 2018 ; Squalli, 2000 ; Squalli *et al.*, 2020). Voici l’argumentaire de Radford (2018) :

The exact role of signs in algebraic thinking remains a matter of contention among mathematics educators. In early algebra research it is not unusual (even if only implicitly) to see the use of alphanumeric symbolism as the trademark of algebraic thinking. Such a theoretical position is nonetheless untenable from a cultural-historical developmental viewpoint. The invention of alphanumeric symbolism is, indeed, a relatively historical recent event. It goes back to the work of 16th and 17th century mathematicians such as Rafael Bombelli, René Descartes, and François Viète. Equating the use of alphanumeric symbolism with algebraic thinking would amount to maintaining that algebra did not exist before the Western early modern period. Yet, 9th century Arabian mathematicians (like Al-Khwarizmi) and hundreds of Renaissance masters of abacus recognized and referred to their work as algebraic. So is the case of the 1544 “Libro e trattato della praticata d’alcibra” [Book and treatise of the practice of algebra] of the Siennese mathematician Gori (1984). You can go through the book page after page, line after line, word after word, and you will see no alphanumeric formulas or equations. You will see algebraic problem-solving procedures expressed in words. (p. 4)

2.3. Différentes significations d’early algebra comme perspective curriculaire

Nous avons vu que sur le plan théorique, les chercheurs d’*early algebra* ont des positions différentes. Sur le plan curriculaire aussi, les positions sont différentes. Nous avons identifié deux significations majoritaires différentes d’*early algebra* auxquelles recourent les chercheurs de manière explicite ou implicite : 1) EA comme préalgèbre, 2) EA comme stratégie d’enrichissement des mathématiques du primaire⁵. Ces significations sont souvent en cohérence avec l’approche didactique de l’algèbre (au sens de Bednarz, Kieran et Lee, 1996) privilégiée dans les curriculums de leur pays.

a) EA comme préalgèbre

Les approches de types EA comme préalgèbre, sont de type « transitionnel », elles visent à faciliter la transition de l’arithmétique à l’algèbre. Comme l’expliquent Carraher et Schliemann (2007), au fil du temps, comme les chercheurs se sont éloignés de la résolution d’équations comme activité principale de l’enseignement de l’algèbre, les approches transitionnelles sont passées à la généralisation, aux patterns numériques, aux variables et aux fonctions. Ces approches ne remettent pas en question l’idée que l’algèbre ne devrait commencer qu’au secondaire. Elles justifient leur rationalité sur un argumentaire du type suivant : les difficultés typiques des élèves débutants en algèbre sont attribuables aux différences inhérentes entre l’arithmétique et l’algèbre. Pour les atténuer, il faut mieux préparer les élèves à « l’entrée dans l’algèbre » du secondaire, souvent synonyme d’introduction des lettres. Les deux questions suivantes nous semblent alors légitimes à être posées :

⁵ Une troisième signification, sous-représentée, est celle d’une algèbre précoce ; elle est basée sur les travaux de Davydov (voir, par exemple, Schmittau et Morris, 2004). Dans cette approche, l’algèbre est introduite sur la base de l’arithmétique quantitative. Les quantités sont représentées par des symboles et ensuite par des lettres avant l’introduction de l’arithmétique numérique.

- Quelle valeur ajoutée apporte la perspective du développement précoce de la pensée algébrique à une approche transitionnelle arithmétique-algèbre ?
- Quelles sont les occasions d'apprentissage favorisées par la perspective du développement précoce de la pensée algébrique qui ne peuvent être saisies par une approche transitionnelle arithmétique-algèbre ?

b) EA comme stratégie d'algébrisation des mathématiques du primaire

Les approches de ce type visent à enrichir les mathématiques du primaire. L'accent est mis sur le développement, sur une longue période, de la pensée algébrique mais également d'autres formes de la pensée mathématique. Parmi les arguments cités, on peut avancer les suivants. Cette stratégie favorise l'enrichissement des mathématiques du primaire au plan de la conceptualisation, des raisonnements ; ainsi que des modes de représentation et d'opération sur ces représentations. En outre, selon Kaput (1995) elle apporte une cohérence et une profondeur au curriculum.

Cette stratégie ouvre la perspective à des curriculums d'une nouvelle génération, organisés selon des trajectoires coordonnées de différentes formes de la pensée mathématique de manière continue du primaire à la fin du secondaire. Elle amène avec elles des questions qui restent, nous semble-t-il, encore ouvertes :

- Le développement précoce de la pensée algébrique en concomitance avec celui de la pensée arithmétique permet-il d'éviter les conflits conceptuels, les discontinuités et ruptures entre les modes de pensées arithmétique et algébrique documentés par les recherches sur la transition arithmétique-algèbre ?
- Comment organiser le développement de la pensée algébrique selon une trajectoire continue du primaire à la fin du secondaire ?
- Comment articuler cette trajectoire de manière cohérente avec celles du développement d'autres formes de la pensée mathématique ?
- Qu'est-ce que l'on perd lorsqu'on passe d'un curriculum basé sur une approche transitionnelle à un curriculum basée sur une algébrisation précoce ?

Conclusion

EA est encore à ses premiers balbutiements. Beaucoup de choses restent encore à faire (Carraher et Schliemann, 2007 ; Radford, 2018). Ce livre numérique regroupe différentes contributions qui touchent un des axes de recherche de l'OIPA ayant servi dans le texte de cadrage de ce collectif.

Axe 1 : Fondements épistémologiques et didactiques

Quels cadres théoriques permettent d'éclairer ce que recouvrent l'algèbre et la pensée algébrique? Dans la littérature didactique, les termes « pensée algébrique » et « raisonnement algébrique » sont souvent utilisés comme synonymes. Pourquoi les différencier et comment peut-on le faire?

Quelles sont les caractéristiques propres à la pensée algébrique? Quels sont les objets sur lesquels se développe cette pensée?

Il ne fait pas de doute que l'arithmétique soit une porte d'entrée pour le développement de la pensée algébrique. Comment peut-on clarifier la relation entre arithmétique et algèbre? Comment distinguer le raisonnement algébrique du raisonnement arithmétique dans différentes activités mathématiques, en particulier dans la résolution de problèmes se ramenant à la recherche de valeurs d'inconnues et dans des problèmes de généralisation?

Plus généralement, quels éclairages théoriques permettent de préciser la distinction entre la pensée algébrique et différents autres modes de la pensée mathématique?

Axe 2 : Curricula et ressources pour le développement de la pensée algébrique

Quelles sont les instructions présentes et les dispositions prises dans les curricula officiels de mathématiques de différents pays pour favoriser le développement de la pensée algébrique? Comment ces dispositions s'opérationnalisent-elles dans les manuels scolaires? S'il n'y a pas d'injonctions explicites dans certains pays, quelles sont les potentialités des ressources que pourraient s'approprier les enseignants pour développer la pensée algébrique? Quels cadres théoriques peuvent être convoqués pour ces analyses et que permettent-ils de mettre au jour? Ainsi sont concernées également dans cet axe, les recherches portant sur les outils et les ressources, y compris numériques, favorisant le développement de la pensée algébrique.

Axe 3 : Apprentissage des élèves

Quels éclairages apportent les recherches empiriques sur le développement de la pensée algébrique chez les élèves? En particulier, quels éclairages a-t-on des raisonnements que les élèves, du primaire et du secondaire, manifestent dans différentes activités mathématiques favorisant le développement de la pensée algébrique? Quels sont les outils sémiotiques mis en œuvre dans l'émergence de ces raisonnements? En quoi ces travaux nous renseignent-ils sur les capacités des élèves et sur les obstacles éventuels qu'ils rencontrent dans le développement de la pensée algébrique avant l'introduction formelle de l'algèbre?

Axe 4 : Enseignement et formation des enseignants

Quels sont les défis, les difficultés et les contraintes que rencontrent les enseignants concernant le développement de la pensée algébrique en classe? Comment les programmes de formation, initiale et continue préparent-ils les enseignants au développement de la pensée algébrique en classe? Comment accompagner les enseignants à intégrer dans leur enseignement des situations et des ressources favorisant le développement de la pensée algébrique?

Quelles sont les recherches sur les pratiques des enseignants qui fournissent des apports sur les possibilités d'un enseignement visant le développement de la pensée algébrique avant l'introduction de la notation algébrique conventionnelle?

Références

- Algebra Working Group [AWG] (1997). *A framework for constructing a vision of algebra*. Minneapolis : National Council of Teachers of Mathematics.
- Bednarz, N. (2001). A problem-solving approach to algebra : Accounting for the reasonings and notations developed by students. Dans H. Chick, K. Stacey, J. Vincent et J. Vincent (dir.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference : The future of the teaching and learning of algebra* (vol. 1, p. 69-78). Melbourne : The University of Melbourne.
- Bednarz, N. et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool : Continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra, perspectives for research and teaching* (p. 115–136). Dordrecht : Springer.
- Bednarz, N., Janvier, B., Mary, C. et Lepage, A. (1992). L'algèbre comme outil de résolution de problèmes : une réflexion sur les changements nécessaires dans le passage d'un mode de traitement arithmétique à un mode de traitement algébrique. Dans *Actes du colloque portant sur l'émergence de l'algèbre* (p. 17-32). Québec : CIRADE, Université du Québec à Montréal.
- Bednarz, N., Kieran, C. et Lee, L. (dir.) (1996). *Approaches to algebra, perspectives for research and teaching*. Dordrecht : Springer.
- Bell, A. (1993). Draft background paper. Dans R. Sutherland (dir.), *Algebraic Processes and the Role of Symbolism, Working Conference of the ESRC Seminar Group*. Londres : University of London.
- Bodanskii, F. (1991). The formation of an algebraic method of problem solving in primary school children. Dans V. V. Davydov (dir.), *Soviet Studies in Mathematics Education : Psychological abilities of primary school children in learning mathematics* (vol. 6, p. 275-338). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.
- Booth, L. (1984). *Algebra : children's strategies and errors*. NFER-Nelson.
- Bosch, M. et Chevillard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.
- Boulton-Lewis, G. M., Cooper, T. J., Atweh, B., Pillay H. et Wilss, L. (2001). Readiness for algebra. Dans T. Nakahara et M. Koyama (dir.), *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, 89-96). Hiroshima, Japon : PME.
- Cai, J. et Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue for multiple perspective*. Berlin : Springer.
- Cai, J. et Howson, G. (2012). Toward an international mathematics curriculum. Dans M.A.K. Clements, A. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick et F.K.-S. Leung (dir.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (p. 949-974). New York : Springer.
- Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans F. K. Lester (dir.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (vol. 2, p. 669–705). Charlotte, NC : Information Age Publishing.

- Chick, H., Stacey, J., Vincent, J. et Vincent, J. (2001). *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference : The future of the teaching and learning of algebra*. Melbourne : The University of Melbourne.
- Cooper, T. J. et Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise : Models, representations and theory for teaching and learning. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education* (p. 187-214). Berlin : Springer.
- Davis, R. (1989). Theoretical considerations : Research studies in how humans think about algebra. Dans S. Wagner et C. Kieran (dir.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (vol. 4, p. 266-274). Hillsdale (NJ) : Erlbaum, National Council of Teachers of Mathematics.
- Demana, F. et Leitzel, J. (1988). Establishing fundamental concepts through numerical problem solving. Dans A. F. Coxford et A. P. Shulte (dir.), *The ideas of algebra, K-12 : 1988 Yearbook* (p. 61-68). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.
- Demonty, I., Vlassis, J. et Fagnant, A. (2018). Besoins des apprenants en matière de pensée algébrique et connaissances pour enseigner cette pensée : évaluation diagnostique des acquis des enseignants à la transition école-collège. Dans M. Demeuse, M. Milmeister et C. Weis (dir.), *L'évaluation en éducation et en formation face aux transformations des sociétés contemporaines. Actes du 30^e colloque de l'Admée-Europe* (p. 457-459). Belval, Luxembourg : Université du Luxembourg.
- Fillooy, E. et Rojano, T. (1989). Solving equations : The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.
- Gouvernement du Québec (2006). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Québec : Ministère de l'Éducation.
- Kaput, J. J. (1995). A research base supporting long-term algebra reform? Dans D. T. Owens, M. K. Reed et G. M. Millaps (dir.), *Proceedings of the 17th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematical Education* (vol. 1, p. 71-93). Columbus, OH : The Ohio State University.
- Kaput, J. J. et Blanton, M. L. (2005). A teacher-centered approach to algebrafying elementary mathematics. Dans T. A. Romberg, T. P. Carpenter et F. Dremock (dir.), *Understanding Mathematics and Science Matters* (p. 99-125). Mahwah, NJ : Erlbaum.
- Kaput, J. J. et West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems : Factors affecting informal reasoning patterns. Dans G. Harel et J. Confrey (dir.), *The Development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (p. 235-287). Albany, NY : State University of New York Press.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 317-326.
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra : A structural perspective Dans S. Wagner et C. Kieran (dir.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (vol. 4, p. 33-56). Hillsdale (NJ) : Erlbaum, National Council of Teachers of Mathematics.

- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Dans A. D. Grouws (dir.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 390-419). New York : National Council of Teachers of Mathematics.
- Kieran, C. (1994). A functional approach to the introduction of algebra - Some pro and cons. Dans J. Ponte et J. F. Matos (dir.), *Proceedings of The 18th International Conference for the Psychology of Mathematical Education* (vol. 1, p. 157-175). Lisbonne : University of Lisbon.
- Kieran, C., Pang, J. S., Schifter, D. et Ng, S. F. (2016). *Early algebra : Research into its nature, its learning, its teaching*. Heidelberg : Springer.
- Kuchemann, D. E. (1981). Algebra. Dans K. Hart (dir.), *Children's understanding of mathematics* (p. 102–119). Londres : John Murray.
- Lins, R. C. (1992). A Framework for Understanding what Algebraic Thinking Is [thèse de doctorat]. Nottingham, UK : University of Nottingham.
- Lins, R. et Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning : The current state of the field. Dans H. Chick, K. Stacey, J. Vincent et J. Vincent (dir.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference : The future of the teaching and learning of algebra* (vol. 1, p. 45-70). Melbourne : The University of Melbourne, Australia.
- MacGregor, M. (1996). Curricular aspects of arithmetic and algebra. Dans J. Gimenez, R. C. Lins et B. Gomez (dir.), *Arithmetics and algebra education : Searching for the future* (p. 50-54). Tarragone, Espagne : Universitat Rovira i Virgili.
- Mary, C., Squalli, H. et Schmidt, S. (2014). Activité de généralisation et de justification chez des élèves en difficulté. Dans C. Mary, H. Squalli, L. DeBlois et L. Theis (dir.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : regard didactique* (p. 163-186). Québec : PUQ.
- Mason, J. et Binns, L. (1993). Exploration of Vergnaud's theorem-in-action in the context of algebra. Dans R. Sutherland (dir.), *Algebraic Processes and the Role of Symbolism, Working Conference of the ESRC Seminar Group*. Londres : University of London.
- Mason, J., Graham, A., Pimm, D. et Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of algebra*. Milton Keynes, UK : Open University Press.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA : NCTM.
- Oliveira, I. (2018, juin). *Programme d'études du Brésil : comment est organisé l'arrimage entre l'avant et l'après lors de l'introduction de la lettre en termes de développement de la pensée algébrique?* Communication présentée au Colloque de l'OIPA 3. Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires, Sherbrooke, Québec.

- Papert, S. (1972). Teaching children to be mathematicians versus teaching about mathematics. *International Journal of Mathematics Education, Sciences and Technology*, 3(3), 249-262.
- Pycior, H. M. (1984). Internalism, externalism, and beyond: 19th-century British algebra. *Historia mathematica*, 11(4), 424-441.
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277.
- Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds. The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (p. 3-26). Cham (Suisse) : Springer.
- Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra* (p. 137-145). Dordrecht : Springer.
- Schmittau, J. et Morris, A. (2004). The development of algebra in the elementary mathematics curriculum of V. V. Davydov. *The Mathematics Educator*, 8(1), 60-87.
- Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base* [thèse de doctorat]. Québec : Université Laval.
- Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3* (p. 346-356).
- Squalli, H. et Bronner, A. (2017). Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel (vol. 1). *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(3), 1-8.
- Squalli, H. et Bronner, A. (2020). Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel (vol. 2). *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 1-10.
- Squalli, H., Bronner, A., Larguier, M., et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 36-62.
- Squalli, H., Mary, C. et Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. Dans J. Lebeaume, A. Hasni et I. Harlé (dir.), *Recherches et expertises pour l'enseignement. Technologie, sciences, mathématiques* (p. 67-78). Bruxelles : DeBoek.
- Stacey, K., Chick, H. et Kendal, M. (dir.). (2006). *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study*. Melbourne : Springer.
- Steinberg, R.M., Sleeman, D. H. et Ktorza, D. (1990). Algebra students knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(2), 112-121.

- Vacquant, C. H. et Macé de Lépinay, A. (1922). *Éléments d'algèbre*. Paris : Masson et cie.
- Vergnaud, G. (1985). Understanding mathematics at the secondary-school level. Dans A. Bell, B. Low et J. Kilpatrick (dir.), *Theory, Research & Practice in Mathematical Education. Shell Center for Mathematical Education* (p. 27-45). Nottingham : University of Nottingham.
- Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. Dans *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (p. 189-199). Grenoble : La pensée sauvage.
- Vergnaud, G., Cortes, A. et Favre-Artigue, P. (1988). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. Dans G. Vergnaud, G. Brousseau et M. Hulin (dir.), *Didactique et acquisition des concepts scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres* (p. 259-279). Grenoble : La pensée sauvage.
- Vlassis, J., Demonty, I. et Squalli, H. (2017). Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (*patterns*) figuratifs. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 131-155.
- Wagner, S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(2), 107-118.
- Wheeler, D. (1989). Contexts for research on the teaching and learning of algebra. Dans S. Wagner et C. Kieran (dir.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (vol. 4, p. 278-287). Hillsdale (NJ) : Erlbaum ; National Council of Teachers of Mathematics.

Chapitre 1

Conception collaborative de ressources pour l'enseignement de l'algèbre élémentaire : une entrée par les programmes de calculs

Sylvie Coppé

Université de Genève

sylvie.coppe@unige.ch

Résumé

Même si de nombreux travaux en didactique des mathématiques portent sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre au niveau du collège en France (élèves de 11 à 15 ans), on note que les pratiques enseignantes évoluent peu et que les difficultés des élèves subsistent. Depuis plus de 10 ans, nous travaillons dans un groupe de recherche collaborative (composé d'enseignant.e.s et de chercheur.se.s) à l'élaboration et à la diffusion de ressources pour les professeur.e.s et les formateur.trice.s de mathématiques dans le cadre de l'enseignement de l'algèbre élémentaire en France. L'objectif est d'élaborer des activités, réalisables et diffusables dans les classes ordinaires, ayant un potentiel didactique important pour motiver l'emploi des notions algébriques mais aussi de travailler de façon conjuguée le sens, les aspects techniques et les justifications. Nous utilisons notamment les programmes de calcul avec une gestion de classe originale. Nous présenterons deux progressions utilisant ces programmes, l'une sur les équations et l'autre sur les preuves. Ces documents sont disponibles sur le site [PEGAME](#).

Mots-clés

Algèbre, programmes de calcul, distributivité, preuves en algèbre, équations

Introduction

Ce texte présente les résultats d'un travail collaboratif entre une chercheuse et des enseignant.e.s⁶ réalisé au sein du laboratoire ICAR⁷ (CNRS⁸, Université de Lyon, ENS⁹ Lyon) depuis 2002 et soutenu par l'IFE¹⁰. L'objectif de ce groupe est la construction collaborative, par des professeur.e.s de mathématiques et la chercheuse de l'UMR ICAR, de ressources pour les enseignant.e.s et les formateur.trice.s sur l'enseignement de l'algèbre au collège en France, et notamment sur les débuts de l'algèbre. Depuis 2011, nous participons au dispositif des LéA¹¹ qui consiste à associer des établissements scolaires et des laboratoires de recherche.

Le groupe a également participé à deux projets européens de recherche : S-TEAM¹² sur les démarches d'investigation et ASSIST-ME¹³ sur l'influence des dispositifs d'évaluation (formative et sommative) sur les pratiques enseignantes et sur les apprentissages des élèves lors de la résolution de problèmes.

Les documents produits sont diffusés sur le site [PEGAME](#) qui propose deux entrées : l'une comporte des activités à proposer dans les classes (classées par niveau) et l'autre présente des documents qui doivent permettre aux enseignants de mieux comprendre nos choix afin de permettre une utilisation en classe plus conforme à ce que nous proposons (Alves *et al.*, 2013). Nos ressources sont réactualisées en fonction des nouveaux programmes et nous avons commencé l'an dernier une collaboration avec des enseignants du primaire pour travailler sur les activités relevant de l'*early algebra* (Radford, 2010), notamment celles qui ont pour objectif la généralisation et l'élaboration de formules sans forcément utiliser de lettres.

Depuis quelques années, nous avons particulièrement travaillé avec les programmes de calcul pour proposer des séquences d'enseignement qui permettent notamment des entrées possibles dans l'algèbre. C'est ce que nous voulons développer dans ce texte en présentant deux progressions utilisant les programmes de calcul, l'une portant sur les équations et l'autre sur les activités de preuve.

Pour commencer nous donnerons quelques précisions sur le type de collaboration, puis nous présenterons rapidement les outils théoriques utilisés dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique. Nous poursuivrons par l'explicitation de quelques constats sur l'enseignement actuel de l'algèbre en France qui justifient notre travail. Après quelques indications sur les recherches en algèbre

⁶ Voici la liste des enseignant.e.s qui participent/ont participé au groupe : Christophe Alves, Olivier Arrouch, Véronique Berger, Serge Betton, Maud Chanudet, Anne Sophie Cherpin, Vincent Duval, Stéphane Garapon, Alexandra Goislard, Sylvie Martin-Dametto, Claire Piolti-Lamorthe, Sophie Roubin, Etienne Spaak.

⁷ Interactions, Corpus, Apprentissages, Représentations (Unité mixte de recherche 5191)

⁸ Centre National de la Recherche scientifique

⁹ Ecole Normale Supérieure

¹⁰ Institut Français de l'Éducation

¹¹ Lieux d'Éducation Associés

¹² [Science-Teacher Education Advanced Methods](#), 2007-2013

¹³ [Assess Inquiry in Science, Technology and Mathematics Education](#), 2013-2016

dont nous nous inspirons et sur l'évolution des programmes d'enseignement nous présenterons des résultats de notre travail de recherche collaborative : les deux progressions que nous avons élaborées sur les équations et sur les preuves accompagnées d'une gestion de classe innovante.

3. Des précisions sur le type de collaboration

La création de ce groupe a été à l'initiative d'un enseignant formateur (S. Betton) et de la chercheuse. L'idée de départ était qu'un grand nombre de connaissances sur l'enseignement de l'algèbre avait été produites à la fois par des recherches théoriques (par exemple sur les enjeux de l'enseignement de l'algèbre, sur les erreurs classiques, sur les entrées possibles) et par des recherches plus orientées vers les pratiques (à travers des propositions d'activités à mettre en place dans les classes) mais qu'elles ne se diffusaient pas dans les pratiques des enseignant.e.s et que l'enseignement de ce domaine restait très (voire trop) centré sur le travail des techniques pour le calcul littéral et pour les équations.

Nous avons donc choisi d'initier un travail collaboratif entre enseignant.e.s et chercheuse pour élaborer, mettre en œuvre et analyser des activités permettant de travailler sur le sens de l'algèbre (à travers des problèmes) et pour mieux comprendre à quelles conditions ces activités pouvaient être diffusées aux autres enseignants.

La finalité première de ce groupe de travail est de produire des ressources pour les enseignants et les formateurs (c'est le contrat passé avec les enseignants) par un travail de co-construction où chacun apporte son expertise sur les recherches sur l'algèbre élémentaire, sur l'enseignement dans les classes de collège et sur la diffusion (prise en compte des pratiques des autres professeurs). En ce sens, nous nous situons dans le modèle de recherche collaborative entre chercheur.se.s et enseignant.e.s (Desgagné, 1997). Nous partageons la position de Bednarz (2013) qui souligne la nécessité de prendre en compte les contextes d'enseignement pour que les activités produites puissent être intégrées dans les pratiques « ordinaires ».

Il ne s'agit donc pas seulement, pour nous, de développer des situations d'enseignement riches et pertinentes sur le plan des apprentissages, contribuant à une construction conceptuelle significative pour les élèves, ce qu'une analyse didactique peut bien sûr permettre d'éclairer, mais de produire des situations qui soient, en plus, viables pour les enseignants dans leur contexte. (Bednarz, 2013, p. 25)

La position de Grangeat (2013) va dans le même sens quand il indique que les évolutions des pratiques des enseignant.e.s se font plutôt par des réorganisations successives qui selon nous, s'opposent à des changements radicaux qui seraient provoqués par des propositions venant des chercheurs sans prise en compte ou trop éloignées des contextes et des connaissances des enseignant.e.s (à la fois celles mathématiques et celles pour enseigner).

Les recherches sur le développement professionnel montrent plutôt que celui-ci consiste en des réorganisations successives des conceptualisations, des manières de penser sa propre activité en rapport avec la situation dans laquelle il est inséré. (p. 158)

Enfin, en suivant Mangiante Orsola (2014) qui cite Béguin et Cerf (2004), nous pouvons aussi décrire notre travail de collaboration comme la « construction d'un monde commun ».

Nous retenons pour notre travail cette notion de monde pour conceptualiser le processus dialogique qui nécessairement va s'installer au cœur du dispositif entre d'une part les formateurs/chercheurs et d'autre part les enseignants. La production de ressource est vue comme la construction possible d'un monde commun, un lieu d'échanges, d'apports mutuels mais aussi de mises en tensions entre des mondes (ou points de vue) différents. (Mangiante Orsola, 2014, p. 140)

Au-delà du travail réalisé (production de ressources), nous soulignons donc l'importance de la composante collaborative et de la composante analyse réflexive commune.

4. Cadre théorique de l'étude

Pour l'élaboration et l'analyse des ressources produites, nous nous plaçons dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) développée par Chevallard (1998, 1999) dont nous rappelons rapidement quelques éléments. Chevallard propose de décrire toute activité humaine par des praxéologies, qui sont des quadruplets formés de types de tâches T (relevant d'une institution donnée), de techniques τ (manières de faire) qui permettent de réaliser les tâches t de même type T (ces techniques ayant une portée limitée), de technologies θ qui sont des discours rationnels sur la technique τ , et des théories Θ désignées comme des technologies de la technologie. Ces quadruplets forment deux blocs : le bloc pratico-technique, composé des types de tâches et techniques et autrement désigné par un savoir-faire et le bloc technologico-théorique généralement identifié comme un savoir. A partir de là, on peut définir des organisations mathématiques qui peuvent se situer à différents niveaux : ponctuelle (autour d'un unique type de tâche) OMP, locale OML, régionale OMR et globale OM.

Généralement, en une institution I donnée, une théorie Θ répond de plusieurs technologies θ_j , dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques $\tau_{i,j}$ correspondant à autant de types de tâches $T_{i,j}$. Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en organisations locales, $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, centrées sur une technologie θ déterminée, ensuite en organisations régionales, $[T_{i,j}/\tau_{i,j}/\theta_i/\Theta]$, formées autour d'une théorie Θ . (Chevallard, 1998, p. 5)

Ainsi, une grande partie de notre travail a consisté à déterminer de grands types de tâches, accompagnées de techniques associées (en évolution suivant le niveau scolaire) mais également en analyse la place des éléments technologiques, notamment la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition.

Ce cadre étant posé, voyons maintenant quelques constats sur l'enseignement de l'algèbre qui permettent d'éclairer les choix faits pour la production des ressources.

5. Constats à partir des difficultés des élèves et des pratiques des enseignants

Comme nous venons de le dire, nous pensons que l'algèbre est davantage enseigné comme un objet que comme un outil. Et pourtant, de nombreuses activités, potentiellement riches d'un point de vue didactique, ont été produites par la recherche pour donner des finalités à cet enseignement mais elles sont peu utilisées dans les classes ou de façon peu pertinente (Coulange et Grugeon-Allys, 2008). Finalement, nous sommes partis des deux constats suivants sur l'enseignement/apprentissage de l'algèbre au début du collège : des difficultés pour les élèves à mobiliser l'utilisation de lettres si on ne l'indique pas dans les problèmes et des erreurs de calcul récurrentes et persistantes chez les élèves. Examinons un peu plus en détail ces premiers constats.

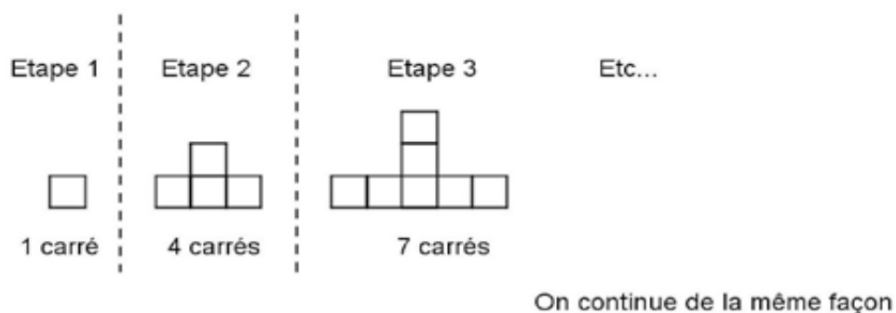
5.1. Des difficultés des élèves à mobiliser l'outil algébrique

Les résultats de l'évaluation nationale CEDRE¹⁴ 2014 montrent que les élèves français de collège mais aussi de lycée peinent à mobiliser les outils algébriques dans les problèmes. Ainsi, ils ont des difficultés à introduire une lettre dans un problème si on ne la leur indique/désigne pas, comme par exemple dans ce problème (Figure 1).

Figure 1

Item posé dans l'évaluation CEDRE

Observer les différentes étapes de construction.



Source. Ministère de l'Éducation nationale [MEN] (2014, p. 22).

Si la première question « Combien de carrés compte-t-on à l'étape 5? » est réussie par 82% des élèves, ce n'est pas le cas de la troisième question qui vise la généralisation en proposant différentes

¹⁴ Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillon.

expressions algébriques : « n représente un nombre entier naturel non nul. Combien de carrés compte-t-on à l'étape n ? ». En effet, cette question n'est réussie que par 14% des élèves.

L'évaluation met en évidence par ailleurs que la maîtrise technique (développer ou factoriser une expression, résoudre une équation, effectuer des opérations sur les radicaux, ...) recule pour l'ensemble des élèves, sauf ceux du groupe 5¹⁵. Par exemple, le taux de réussite aux items demandant à l'élève de développer ou factoriser une expression baisse en moyenne de 8 points de pourcentage entre 2008 et 2014. (MEN, 2014, p. 10)

Ce premier constat sur la difficulté des élèves à généraliser nous alerte, une interprétation possible étant que ce type de tâches n'est pas habituel dans les classes. Or ce n'est pas pour autant que les élèves réussissent les exercices techniques puisque dans le même temps, on constate que les performances en calcul littéral sont en baisse alors qu'on pourrait penser que les enseignants proposent de nombreux exercices de calcul. Ainsi ce recul des performances pointé ici tant sur la résolution de problèmes que sur les calculs a été une source de questionnement et nous a amené à repenser l'enseignement de l'algèbre élémentaire.

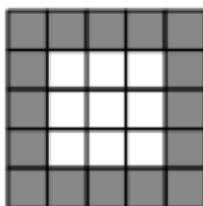
5.2. Des pratiques qui réduisent les enjeux d'apprentissage

Pour illustrer à la fois le fait que les élèves ne mobilisent pas l'outil algébrique et que les enseignants proposent peu de problèmes en algèbre, nous avons mené une étude sur le problème bien connu du carré bordé (Figure 2), fréquemment proposé dans les manuels et utilisé dans les classes, qui a été étudié par les chercheurs pour ses grandes potentialités d'apprentissage (produire une formule, introduire la lettre et montrer l'équivalence des expressions littérales) (Coppé, Grugeon-Allys et Pilet, 2016).

Figure 2

Le problème du carré bordé dans sa version initiale

« Le problème consiste à établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux hachurés d'une figure construite sur le modèle ci-contre, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré. ».



Source. Combiér, Guillaume et Pressiat (1996, p. 42).

Nous avons recherché les différentes formulations de ce problème dans les manuels français de 1996 à 2014 pour déterminer ses différentes adaptations et, pour chacune, quels apprentissages étaient alors en jeu. Pour cela nous avons étudié 26 séries de manuels de collège depuis 1996. On retrouve ce

¹⁵ Ce sont les meilleurs élèves.

problème dans la moitié au niveau 5^e ou 4^e dans différents types d'exercices d'introduction, d'application ou de recherche. Nous avons tout d'abord montré que les énoncés proposés sont très différents d'un manuel à l'autre et nous avons classé les adaptations du problème initial en quatre catégories allant d'un texte court, proche de la version initiale à un texte long avec de nombreuses questions intermédiaires et/ou des propositions d'expressions littérales. Dans 11 cas sur 13, le seul enjeu du problème est de produire une expression littérale sans autre finalité (les deux autres ne demandent pas de formule générale) et dans aucun des manuels, l'introduction de la lettre est laissée à la charge des élèves (il est toujours indiqué « appelle x... »). Cette dernière remarque nous permet de mieux comprendre pourquoi les élèves ont des difficultés à mobiliser une lettre dans un problème puisqu'ils n'y sont pas habitués.

On note également que ce problème est proposé sous des formes affaiblies avec des énoncés qui réduisent ses enjeux et ses objectifs (les élèves sont fortement guidés, ils n'ont pas la responsabilité de la production de formules). La question de la transformation de l'énoncé de ce problème dans les manuels et donc dans les pratiques a suscité de nombreuses discussions dans le groupe qui ont amené à faire deux hypothèses. D'une part il est probable les enseignants ont des difficultés à comprendre le potentiel didactique et les finalités de ce problème ou bien ils pensent que leurs élèves ne pourront pas le faire et c'est pourquoi ils ajoutent de nombreuses questions ou réduisent l'enjeu. D'autre part, on peut penser qu'une des raisons de ces difficultés est que cette activité ne peut pas être proposée de façon isolée sans que la question de son intégration dans des progressions au sein d'organisations mathématiques soit envisagée (Coppé et Grugeon-Allys, 2015). En appui sur cet exemple, le travail du groupe a été réorienté vers la production de séquences de classe plutôt que de séances.

5.3. Place de la distributivité

Pour comprendre la persistance des erreurs de calcul, nous avons étudié la place et le rôle de la distributivité comme élément de justification. La figure 3 présente un extrait de manuel assez typique pour la partie « Cours sur la distributivité de la multiplication sur l'addition » (Barnet *et al.*, 2016). Nous constatons que le manuel structure son plan par les tâches, dont on voit la deuxième ici, « Développer un produit » (la première étant « simplifier une expression littérale et la troisième « factoriser une somme »). La propriété de distributivité, dont le nom n'apparaît pas, est juste appelée « règle » et arrive en second plan. Elle est citée avec deux formulations, pour une somme puis pour une différence, comme dans la plupart des manuels actuels ce qui montre que les auteurs n'assument pas l'entrée dans l'algèbre. Mais, au-delà de cette remarque, nous pensons que ces deux formulations peuvent engendrer des erreurs dans les contrôles notamment dans le cas où k est négatif (d'ailleurs les deux exemples ne portent que sur des nombres k positifs).

Développer un produit apparaît ainsi comme une tâche qui consiste à « transformer » (ceci est désigné comme une définition) sans dire comment on le fait. C'est l'utilisation des ostensifs (Bosch et Chevallard, 1999) tels que les couleurs (quelquefois il y a aussi des flèches), reprises dans l'exemple qui suit, qui donnent des indications sans que l'on évoque les opérations en jeu. Dans l'exemple, on trouve le terme « distribuer » à la place de transformer mais cela ne permet pas non plus de lever les implicites sur l'utilisation de la propriété. Par exemple, un élève qui fait l'erreur classique $3(x + 5) = 3x + 5$ a bien

transformé un produit en une somme et a bien, en quelque sorte, distribué le 3. Enfin nous notons la formulation vague « k , a et b désignent des nombres » (quels nombres? tous les nombres?).

Pour la troisième tâche, « factoriser », on retrouve exactement le même schéma, avec cette fois-ci « la règle » qui est de nouveau la distributivité mais énoncée, de nouveau sous deux formes, dans le sens factorisation. Cela peut donner l'illusion qu'il aurait deux propriétés distinctes ou que le signe égal ne se lit que dans un sens.

Figure 3

Cours Hachette 4^e

2 Développer un produit

Développer, c'est transformer un produit en somme ou en différence. Définition

k , a et b désignent des nombres.

$\underbrace{k(a + b)}_{\text{produit}} = \underbrace{ka + kb}_{\text{somme}}$ <p>→ développer</p>	$\underbrace{k(a - b)}_{\text{produit}} = \underbrace{ka - kb}_{\text{différence}}$ <p>→ développer</p>
--	---

Exemples

On veut développer $A = 7(4 + x)$:

$$A = 7(4 + x)$$

$$A = 7 \times (4 + x)$$

$$A = 7 \times 4 + 7 \times x$$

$$A = 28 + 7x$$

$28 - 7x \neq 35x$

On distribue le 7 à chacun des termes de la parenthèse, puis on réduit l'expression pour qu'elle soit la plus simple possible.

On veut développer $B = 3(x - 4)$:

$$B = 3(x - 4)$$

$$B = 3 \times (x - 4)$$

$$B = 3 \times x - 3 \times 4$$

$$B = 3x - 12$$

Source. Barnett et al. (2016, p. 90).

À travers cet exemple, nous voulons montrer que la propriété de distributivité n'a pas un statut clair dans les manuels ni sur le fait que c'est un élément technologique, ni dans sa formulation, ni dans ce qui est montré de son utilisation. Notre expérience de formatrice nous laisse penser que c'est la même chose dans les pratiques des enseignant.e.s alors que ceux.celle.s-ci déplorent les nombreuses erreurs de calcul de leurs élèves. Nous le constatons ici à la fois sur la place peu importante, accordée à la propriété et dans les deux exemples (qui ont pour fonction de montrer comment on fait) dans lesquels on s'appuie encore une fois sur un terme pris dans son sens usuel (« on distribue ») qui n'indique ni la démarche mathématique ni les contrôles possibles. C'est ce que nous avons déjà conclu dans une étude faite en 2012 (Assude, Coppé et Pressiat, 2012). Il semble donc qu'il n'y a pas d'évolution sur ce point.

Il en résulte que la propriété de distributivité perd sa prépondérance technologique pour justifier et valider les calculs. Il y a donc un risque que les élèves ne l'utilisent pas et se rabattent sur des techniques portant sur les transformations d'écritures exclusivement basées sur des ostensifs, avec des critères de vérification peu opérationnels portant sur la forme. (p. 55).

Ces constats que nous avons faits au début de notre travail sur la base de nos expériences d'enseignant.e.s et de formateur.trice.s et qui ont été retravaillés à plusieurs reprises (ce qui est présenté ici est le résultat de ce travail), nous ont permis la rédaction collective de sept principes qui ont toujours guidé les choix du groupe dans l'élaboration des documents. Voici les principaux :

- favoriser l'activité des élèves,
- donner des finalités à l'enseignement de l'algèbre notamment par les activités de généralisation et de preuve,
- travailler conjointement sur le sens et sur les techniques algébriques,
- justifier les calculs par l'utilisation de propriétés.

Voyons maintenant quelques éléments du contexte des programmes français (en constante évolution) dans lequel nous avons travaillé.

6. Rapide survol de l'évolution des programmes français

Pour mieux comprendre le contexte de cette étude, nous soulignons quelques points concernant l'évolution des programmes d'enseignement français depuis la période dite des mathématiques modernes. Comme l'a souligné Chevallard (1985), l'algèbre n'a plus constitué un domaine des programmes du collège depuis 1971, contrairement aux périodes précédentes. Après la période des mathématiques modernes (1970-1978), l'insistance sur la résolution de problèmes est posée un peu plus à chaque nouveau programme. Lors des programmes de 1985 et 1995, l'entrée progressive dans l'algèbre se fait tout au long du collège (élèves 12-15 ans) avec, à côté du calcul littéral, l'accent mis sur les équations du premier degré qui sont étudiées par ordre de complexité selon les niveaux de classes (équations du type $a + x = b$, puis $ax = b$, etc.). On a donc essentiellement des types de tâches relevant des équations avec des techniques qui évoluent en fonction des types d'équations (et donc des années scolaires) pour aboutir à des équations de type $ax + b = cx + d$ résolues avec les techniques expertes justifiées par les règles de calcul sur les égalités. On peut noter ici le passage progressif d'organisations mathématiques ponctuelles puis locales centrées sur les équations.

Dans les programmes de 2005, puis de 2007 et enfin de 2008, apparaît une diversification des types de tâches (plus seulement résoudre des équations, mais aussi faire des preuves en algèbre) dont nous avons montré (Assude *et al.*, 2012) qu'elle n'était pas toujours lisible car les notions algébriques étaient réparties dans différentes parties du programme (ce que nous avons qualifié d'atomisation de l'algèbre).

A côté de cela, depuis 1995, en 5^e, est introduite la formule de distributivité sous les deux formes (addition et soustraction) ; elle est donnée sans quantificateur et nous notons que les programmes précisent qu'elle doit être utilisée dans les deux sens, ce qui peut paraître curieux concernant le signe =.

Sur des exemples numériques / littéraux, utiliser les égalités $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$ dans les deux sens. L'intégration des lettres dans ce type d'égalité est une difficulté qu'il faut prendre en compte. Elle s'appuie sur des situations empruntées aux cadres numérique et graphique. (MEN, 2005, p. 11)

Cette propriété est donnée avec les deux formulations car à ce niveau d'enseignement, d'une part, la distributivité est posée et travaillée à partir du numérique et, d'autre part les relatifs sont également en cours d'introduction. La référence à cet extrait du programme explique certainement pourquoi les manuels continuent de proposer les deux formulations même une année plus tard alors que ce n'est plus justifié puisque tout ce qui concerne les relatifs a été introduit.

En résumé, depuis 1978, on note donc des organisations mathématiques régionales encore peu articulées entre le calcul littéral, les équations, puis plus récemment, les preuves. Or nous pensons qu'il est possible de faire des liens entre ces organisations mathématiques. Pour les équations et les preuves, il est possible d'étudier l'équivalence des expressions : deux expressions sont-elles égales pour tous les nombres ou bien quels sont les nombres pour lesquels ces deux expressions sont égales? L'organisation mathématique autour du calcul littéral proprement dit pourra alors être justifiée par la nécessité de transformer les expressions littérales en jeu lors des calculs. De plus, résoudre des équations et produire des preuves donnent des finalités à l'enseignement de l'algèbre au collège avant que d'autres soient vues au lycée notamment grâce à l'analyse.

En 40 ans, on note donc des évolutions lentes mais tout de même importantes dans les programmes d'enseignement français. Ces évolutions vont d'une conception de l'algèbre comme calcul formel à l'introduction de problèmes et à la prise en compte de tâches diversifiées (plus seulement les équations). Pour témoigner de cette évolution, voici un extrait du programme de 2016 (Figure 4) dans lequel il est à noter le titre « utiliser le calcul littéral » qui vise à faire apparaître le calcul littéral comme un outil plutôt que seulement comme un objet d'enseignement.

Cependant on peut penser que les pratiques évoluent lentement. Une étude faite sur les manuels de collège (Coppé et Grugeon-Allys, sous presse) montre que des types de tâches de preuve et de généralisation ont été introduits depuis le changement de programme mais de façon très progressive : sur 7 manuels de la classe de 4^e (élèves de 13-14 ans) de 2011, nous avons dénombré de 3 % à 12 % des exercices, puis plus récemment sur 5 manuels de cycle 4¹⁶ de 2016, les taux évoluent de 10,5 % à 23 %.

¹⁶ Depuis 2016, il existe des manuels pour tout le cycle 4 qui comprennent les classes de 5^e, 4^e et 3^e.

Figure 4

Extrait du programme français mis en place en 2016, cycle 4

Utiliser le calcul littéral

Mettre un problème en équation en vue de sa résolution.	Comprendre l'intérêt d'une écriture littérale en produisant et employant des formules liées aux grandeurs mesurables (en mathématiques ou dans d'autres disciplines).
Développer et factoriser des expressions algébriques dans des cas très simples.	Tester sur des valeurs numériques une égalité littérale pour appréhender la notion d'équation.
Résoudre des équations ou des inéquations du premier degré. - Notions de variable, d'inconnue.	Étudier des problèmes qui se ramènent au premier degré (par exemple, en factorisant des équations produits simples à l'aide d'identités remarquables).
Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture.	Montrer des résultats généraux, par exemple que la somme de trois nombres consécutifs est divisible par 3.

Source. MEN (2015, p. 73).

On peut donc penser que même si, depuis 2005, nous avons noté dans les programmes une diversification des types de tâches renforcée par l'évolution de l'examen final du collège, l'évolution reste lente dans les manuels et donc certainement dans les pratiques. Or les activités de généralisation et de preuve permettent aux élèves de comprendre l'intérêt de mobiliser des variables et des formules.

7. Des travaux de référence sur les recherches en algèbre élémentaire

Dans cette partie, nous présentons quelques travaux de recherche en didactique de l'algèbre sur lesquels nous nous sommes particulièrement appuyés pour créer une culture commune dans le groupe et pour élaborer les activités de classe et les documents pour les enseignant.e.s.

Les travaux de didactique portant sur l'algèbre élémentaire sont très nombreux depuis les années 80 et encore récemment comme ceux rassemblés dans le numéro spécial de Recherche en didactique des mathématiques (Coulange, Drouhard, Dorier et Robert, 2012), ce qui montre l'ampleur du domaine. De nombreux résultats ont été produits, nous ne pouvons pas les reprendre tous ici mais nous signalons la synthèse faite par Chaachoua (2015). Il est à noter que certains semblent encore peu connus des enseignants notamment ceux qui concernent les erreurs classiques en calcul algébrique pointés notamment par Booth (1985) ou de Tirosh, Even et Robinson (1998) (justifications « salade de fruits »).

Nous avons également retenu les travaux qui portent sur les ruptures et continuités dans la transition arithmétique/algèbre, comme ceux de Kieran (1990) sur les fausses continuités et discontinuités, ceux de Gascón (1993) qui montrent que l'algèbre élémentaire n'est pas une arithmétique généralisée ou ceux de Vergnaud (1988) sur les entrées dans l'algèbre, les différences entre procédures arithmétiques ou algébriques dans la résolution de problèmes. Comme le souligne Vergnaud (1988), ce passage entre arithmétique et algèbre est difficile pour les élèves, il est donc important de donner du temps et de proposer des problèmes qui motivent ce passage.

L'algèbre constitue pour les élèves une rupture épistémologique importante d'avec l'arithmétique. Cette rupture mérite une analyse détaillée, car beaucoup d'élèves n'entrent pas facilement dans le jeu des manipulations symboliques (p. 191).

Pour distinguer les enjeux de l'enseignement de l'algèbre, nous avons repris les quatre principales perspectives d'introduction pour donner du sens aux nouveaux objets élaborées faites par Bednarz et Janvier (1996) : l'approche par la généralisation / récurrence, l'approche par la résolution de problèmes / mise en équation, l'approche par la modélisation et l'approche technologique / fonctionnelle).

Plus récemment, Kieran (2007) définit trois aspects de l'activité algébrique avec le « modèle GTG » pour conceptualiser l'activité algébrique : l'activité générative en lien avec la résolution de problèmes de modélisation ou de preuves, l'activité transformationnelle sur les expressions symboliques et l'activité globale au niveau méta qui considère que l'algèbre est un outil. Elle insiste notamment sur le fait que l'activité transformationnelle doit mettre en avant les justifications, ce qui est en lien fort avec ce que nous vu sur la distributivité et que c'est bien l'articulation entre les activités génératives et transformationnelles qui permet les apprentissages.

Enfin, nous avons utilisé les programmes de calcul suite aux travaux sur la modélisation fonctionnelle de Ruiz-Munzón (2010) qui définit l'algèbre élémentaire comme un processus d'algébrisation des programmes de calcul.

Pour résumer, nous reprenons cette citation qui caractérise notre démarche de production de ressources.

En bilan, nous retenons que l'enseignement de l'algèbre doit viser le développement d'un rapport fonctionnel à l'algèbre visant un calcul intelligent et contrôlé, au service de la résolution de problèmes - problèmes de modélisation, de mise en équation, de généralisation et de preuve - qui permet un pilotage du calcul en fonction du but poursuivi, en appui sur la structure interne des objets, sur un contrôle syntaxique et par la sémantique interne des expressions équivalentes obtenues par transformation, articulant la dialectique algébrique / numérique. (Coppé et Grugeon-Allys, 2015, p. 46)

Après l'exposé de tous ces éléments de problématisation et de cadrage théorique, nous donnons maintenant quelques résultats de ce travail collaboratif d'une part sur les ressources produites en termes de séquences d'enseignement et d'autre part sur une gestion de classe innovante.

8. Des résultats de ce travail collaboratif

Dans ce texte, nous avons choisi de présenter trois effets de ce travail collaboratif. Comme nous l'avons dit plus haut, une évolution déterminante de notre travail a consisté à proposer des séquences de classe plutôt que des activités pertinentes mais isolées. Nous présentons tout d'abord, deux progressions qui peuvent être mise en œuvre dans les classes de 5^e et 4^e (élèves de 12-14 ans) : l'un portant sur les équations et l'autre sur les preuves, puis une gestion de classe originale directement issue du travail fait.

8.1. Utilisation des programmes de calcul

Drouhard (1995) a introduit la notion de programme de calcul dans ses travaux sur la didactique de l'algèbre. Chevallard (2007), dans ses cours aux professeurs de mathématiques stagiaires, développe cette notion en indiquant notamment qu'ils peuvent être utilisés dès le primaire, idée que nous partageons. Par ce biais, il pointe également les liens entre numérique et algébrique.

Il est de même usuel de parler d'expression algébrique, sans que l'on sache ce que cette « expression » exprime! Pour qu'il en aille autrement, il convient de partir de ce dont nous parle l'algèbre : $3x^2$, par exemple, est l'expression algébrique (ou littérale) d'un certain programme de calcul, à savoir le programme de calcul qui, étant donné un nombre x , « renvoie » le nombre $3x^2$, et qui, donc, pour $x = 1$, renvoie 3, pour $x = 4$ renvoie 48, etc. L'algèbre élémentaire est ainsi la science des programmes de calcul (sur les nombres), et en particulier la science du calcul sur les programmes de calcul. La notion de programme de calcul se construit aujourd'hui à l'école primaire et dans les premières années du collège : elle formalise l'idée de « faire un calcul », c'est-à-dire le fait d'opérer sur des nombres d'une manière déterminée, selon un certain programme. (p. 167)

Pour l'entrée dans l'algèbre, les programmes de calcul nous semblent être un outil facile à utiliser par les enseignant.e.s et les élèves car le texte est en général simple à la différence de certains problèmes. Les enseignant.e.s peuvent proposer des progressions dans les objectifs, les procédures (personnelles ou expertes) et dans les difficultés en jouant sur les variables didactiques (nombres en jeu, formes des programmes). Ils permettent de travailler dans différents registres de représentation, sur les aspects structural et procédural (Sfard, 1991). Ils favorisent également des articulations entre un travail sur le sens selon les questions posées et un travail sur les techniques de calcul selon la forme des programmes. En résumé, ils amènent à penser les apprentissages des élèves en fonction des savoirs en jeu en sortant des chapitres classiques (calcul littéral/équations/ preuves) en se centrant davantage sur les raisons d'être de l'algèbre et finalement, en partant de la question génératrice : à quelles conditions deux programmes de calcul donnent-ils le même résultat? Toujours le même résultat?

En utilisant les programmes de calcul, nous pensons qu'il est possible de développer des organisations mathématiques autour de la résolution d'équations et de la preuve.

8.2. Progression sur les équations avec les programmes de calcul

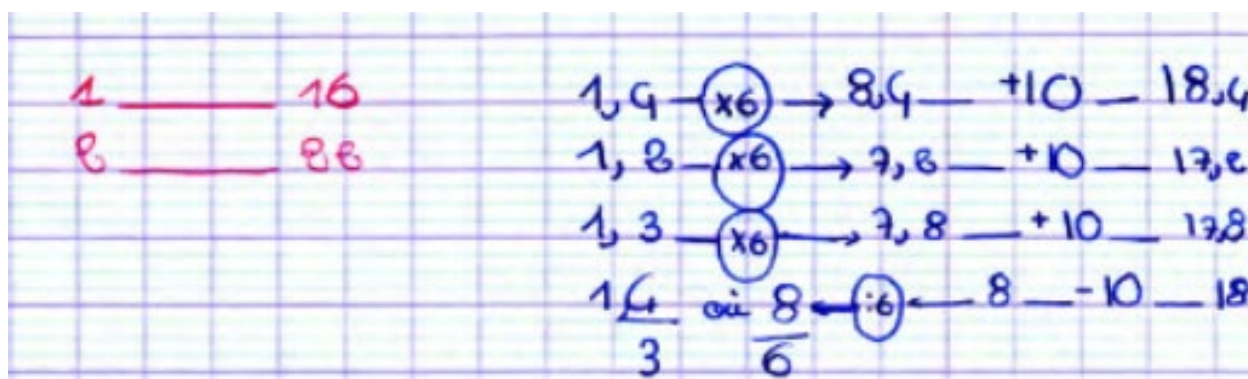
Voici une progression basée sur les programmes de calcul qui peut être proposée en classe de 5^e et 4^e du collège français (élèves de 12- 14 ans). Nous présentons les trois étapes principales qui la composent en précisant les types de programmes de calcul utilisés, les procédures personnelles et expertes et les institutionnalisations possibles. Bien sûr pour chaque étape, les enseignants utilisent plusieurs programmes de calcul en jouant sur les variables didactiques concernant les nombres en jeu ou les solutions.

Dans la première étape, une première organisation mathématique ponctuelle est proposée à partir d'un premier type de tâche portant sur des programmes de calcul que nous pouvons traduire par

des expressions du type $ax + b$ (par exemple, *je pense à un nombre, je le multiplie par 6 et j'ajoute 10 au résultat*). Dans une première phase, les élèves font fonctionner le programme en se donnant un nombre et en notant ce qui ressort du programme. Puis dans une deuxième, ils cherchent le nombre initial connaissant ce qui ressort du programme. On travaille donc sur les équations de type $ax + b = c$ mais sans avoir ce formalisme puisque les élèves peuvent trouver sans mobiliser une inconnue et une équation. Ainsi deux techniques sont utilisées : ils peuvent trouver par des essais/ajustements contrôlés ou bien, comme on le voit dans la production ci-dessous (Figure 5), en remontant les calculs.

Figure 5

Production d'un élève de 5^e (12-13 ans)



L'élève commence par faire des essais contrôlés pour approcher 18. Il comprend que la solution est comprise entre 1,3 et 1,4. Il change alors de stratégie et remonte les calculs en utilisant les opérations inverses et il trouve la solution. Nous constatons donc, comme prévu, que l'élève n'a pas besoin d'introduire la lettre à ce stade (il reste sur des procédures arithmétiques). Il utilise des ostensifs avec des flèches, des bulles. Grâce au choix des variables didactiques, on peut jouer sur la nature de la solution afin de favoriser ou non la recherche par essais/ajustements comme dans l'exemple ci-dessus puisque la solution n'est ni entière ni décimale, la recherche par essais peut être mise en défaut. A ce stade, l'institutionnalisation porte sur la méthode et les opérations inverses (éventuellement des ostensifs non conventionnels peuvent vivre dans la classe pendant un moment).

Dans la deuxième étape, une deuxième organisation mathématique ponctuelle est travaillée en complexifiant la forme des programmes de calcul : *je pense à un nombre, je lui ajoute 3, je multiplie le résultat par 5 et j'enlève au résultat le nombre de départ*, ce qui correspond à une expression littérale non réduite. Si les élèves utilisent la symbolisation précédente, ils peuvent traduire le programme de cette façon (Figure 6) et constater que la technique de remonter les calculs fonctionne moins bien. En revanche, ils peuvent toujours chercher par essais/ajustements même si n'est pas simple ici.

Figure 6

Programme de calcul



Les élèves sont alors amenés à essayer de transformer le programme pour en obtenir un équivalent de la forme de ceux travaillés à l'étape 1. Soit la lettre n a pas été introduite et les élèves vont alors utiliser des raisonnements en langue naturelle tels que « puisqu'on a multiplié par 5, on a 5 fois le nombre de départ et si on l'enlève, il reste 4 fois le nombre de départ », soit la lettre a été introduite et ils peuvent alors traduire le programme en une expression littérale, puis plus facilement la transformer.

C'est ce qu'on voit sur la copie de cet élève (Figure 7) qui est encore à un stade intermédiaire où il convoque des expressions littérales et des symbolisations avec flèches et bulles. Dans un premier temps, l'élève travaille avec l'expression littérale qui correspond au programme de calcul. Il utilise la distributivité pour réduire l'expression. Puis il reconnaît une expression de type familier qu'il traduit avec les ostensifs flèches et bulles, il remonte les calculs, trouve la solution et fait la vérification sur le programme de calcul initial.

Figure 7

Production d'un élève de 4^e (13-14 ans)

~~35 - (-25) -> 0 - (-65)~~
 x est n'importe quel nombre
 $(x + 3) \times 5 - x$
 $= x \times 5 + 3 \times 5 - x$
 $= x \times 5 + 15 - x$
 $= 5x + 15 - x$
 $= 4x + 15$
 ... - (x4) -> ... - (+15) -> ...
 $25 - (-15) -> 10 - (:4) -> 2,5$
 $2,5 - (+3) -> 5,5 - (x5) -> 27,5 - (-25) -> 25$

A cette étape, l'institutionnalisation porte la méthode avec l'introduction d'une lettre comme variable ou inconnue, sur la propriété de distributivité qui permet de justifier les calculs.

Quelques précisions sur cette deuxième étape qui est complexe puisque de nouvelles connaissances sont en jeu. Tout d'abord, contrairement à la précédente, on peut penser que l'introduction de la lettre peut faciliter la résolution. Cependant rien n'assure que la lettre puisse être introduite par les

élèves. Nous pensons que si ce n'est pas le cas, c'est à l'enseignant de le faire. Pendant de nombreuses années, les chercheurs ont tenté, avec plus ou moins de succès, de trouver des problèmes qui nécessitaient véritablement l'introduction de la lettre (par exemple, les problèmes connectés et déconnectés de Bednarz et Janvier, 1996). Nous pensons actuellement qu'il est plus important de proposer aux élèves différents types de problèmes et de trouver des organisations mathématique et didactique pertinentes que de poursuivre cette recherche.

Transformer des expressions littérales suppose l'utilisation de la distributivité comme élément technologique. Il est donc nécessaire que celle-ci ait été introduite et travaillée, ce qui n'a pu être le cas que dans un cadre arithmétique, notamment par le biais du calcul mental (Constantin, 2014). Une fois la lettre introduite et sous réserve que les relatifs l'aient été aussi, on pourra alors institutionnaliser la formule de la distributivité de la multiplication sur l'addition sous une seule formulation.

On voit donc que cette étape est cruciale, qu'il est nécessaire de donner du temps aux élèves pour qu'ils puissent passer des procédures personnelles que nous avons montrées à une procédure plus experte en utilisant la lettre et les expressions littérales.

Durant la troisième et dernière étape, on introduit une nouvelle organisation mathématique ponctuelle avec deux programmes de calcul qui donnent le même nombre pour un nombre donné afin d'aboutir à des équations du type $ax + b = cx + d$ comme dans cet exemple : « *Je choisis un nombre, je le multiplie par 3. J'ajoute 8 au résultat. Je trouve le même résultat que lorsque je le multiplie par 7 et j'ajoute 5 au résultat.* »

Les élèves peuvent plus difficilement utiliser les techniques précédentes. Comme la lettre a été introduite, on peut penser que les élèves vont réinvestir ce qu'ils ont appris mais dans une situation différente (par exemple, une difficulté est de concevoir que x désigne le même nombre). A cette étape, ce sont les techniques de résolution des équations qui sont en jeu et qui seront institutionnalisées.

Nous avons décrit une progression avec trois organisations mathématiques ponctuelles qui peuvent constituer une organisation mathématique locale sur les équations en utilisant les programmes de calcul. On note bien les liens étroits entre les problèmes (ici d'équations) et les techniques de calcul littéral. Bien sûr, cela n'exclut pas d'autres problèmes d'équations posés à partir d'énoncés plus classiques.

Voyons maintenant ce qu'il en est de l'utilisation des programmes de calcul pour les activités de généralisation / preuves en algèbre.

8.3. Progression sur les preuves avec les programmes de calcul

Actuellement nous ne sommes pas en mesure de décrire une progression semblable à celle proposée sur les équations. Cependant, nous pouvons décrire deux organisations mathématiques ponctuelles portant sur la preuve utilisant les programmes de calcul.

Une première organisation s'articule autour du type de tâches prouver qu'un programme de calcul donne toujours le même nombre comme dans le programme suivant que nous illustrons par une copie d'élève (Figure 8) : « *Je choisis un nombre, je le multiplie par 5, j'ajoute 6 au résultat, je multiplie le tout par 2 et j'enlève 10 fois le nombre de départ.* »

On peut noter qu'après trois essais sur des nombres entiers, l'élève est convaincu de la validité de son résultat à savoir : cela donne toujours 12. Il refait ensuite les calculs de façon séquentielle pour arriver à montrer que la suite de calculs donne 12 (d'ailleurs le signe = n'est indiqué qu'à la fin comme un résultat). Il n'arrive pas encore à organiser son calcul sous la forme d'une seule expression littérale.

Figure 8

Copie d'un élève de 4^e (13-14 ans)

Je choisis 2 ; Je choisis 3 ; Je choisis 5

$2 \times 5 = 10$	$3 \times 5 = 15$	$5 \times 5 = 25$
$10 + 6 = 16$	$15 + 6 = 21$	$25 + 6 = 31$
$16 \times 2 = 32$	$21 \times 2 = 42$	$31 \times 2 = 62$
$32 - 20 = 12$	$42 - 30 = 12$	$62 - 50 = 12$

On constate que pour tout nombre choisi le résultat sera 12 si on le fait avec ce programme

Je choisis x

$$x \times 5 = 5x$$

$$5x + 6 = 5x + 6$$

$$(5x + 6) \times 2 = 10x + 12$$

$$10x + 12 - 10x = 12$$

On a réussi à démontrer donc le programme est justifié

Un autre type de tâches est de proposer des programmes de calcul qui aboutissent à une valeur remarquable comme trouver un nombre pair, n fois le nombre de départ, etc. On peut trouver des idées de tels programmes à partir de propriétés arithmétiques. La technique mise en œuvre est constituée d'une première étape de résolution qui est alors de repérer cet invariant moins immédiat que dans le cas précédent, une seconde est de savoir le désigner par une écriture littérale. Par ce type de programmes les élèves sont amenés à travailler sur l'aspect structural de l'algèbre. A cette occasion, pourront être institutionnalisés des désignations particulières (nombres consécutifs, nombres pairs/impairs, multiple de, etc.). L'institutionnalisation portera également sur la démarche de recherche, à savoir faire des essais, une conjecture et la prouver en utilisant le calcul littéral et donc une lettre qui représente une infinité de valeurs. Enfin il est important de souligner que l'enjeu de la preuve pour les élèves relève davantage de l'explication (comprendre pourquoi, on obtient toujours ce résultat) que du besoin de se convaincre du résultat (ce qui est en général assez immédiat pour les élèves, comme on le voit dans l'exemple ci-dessus, fig. 7). Enfin c'est également l'occasion de rencontrer l'utilisation des contre exemples. Là encore l'utilisation du calcul littéral constituera une technique pour la preuve et la distributivité de la multiplication sur l'addition sera un élément technologique fondamental.

Pour terminer, analysons la copie de cet élève (Figure 9) pour le problème suivant (le résultat est toujours 10 fois le nombre de départ) : « Je choisis un nombre, je le multiplie par 5, j'ajoute 3 au résultat. Je multiplie le résultat par 2 et j'enlève 6. Que constates-tu? Prouve-le ».

Contrairement à l'élève précédent, celui-ci ne mobilise pas la lettre et n'utilise pas d'expressions littérales. Après 4 essais sur des valeurs entières (ce qui l'amène à dire à la fin que le nombre se termine par 0 « le nombre pile »), l'élève énonce sa conjecture « le nombre de départ fois 10 » qu'il montre en utilisant les ostensifs que nous avons déjà rencontrés avec deux systèmes de flèches et les bulles. Les flèches montrent que l'élève a bien vu que multiplier par 5 puis par 2 revient à multiplier par 10, ce qu'il indique par une nouvelle flèche et de même pour $3 - 6$ qui fait 0, ce qu'il indique également. Donc cet élève ne mobilise pas le calcul littéral mais est capable en prenant un exemple générique de raisonner correctement sur les opérations du programme de calcul et de trouver la réponse.

Figure 9

Copie d'un élève de 4^e

1). $4 \xrightarrow{\times 5} 20 \xrightarrow{+3} 23 \xrightarrow{\times 2} 46 \xrightarrow{-6} 40$

2). $20 \xrightarrow{+6} 26 \xrightarrow{\times 2} 52 \xrightarrow{-3} 49 \xrightarrow{\times 5} 245$

3).

$10 \rightarrow 50 \rightarrow 53 \rightarrow 106 \rightarrow 100$

$15 \rightarrow 75 \rightarrow 78 \rightarrow 156 \rightarrow 150$

4) le resultat sera toujours un nombre pile
et aussi le resultat sera le nombre
de depart $\times 10$ car :

$6 \xrightarrow{\times 5} 30 \xrightarrow{+3} 33 \xrightarrow{\times 2} 66 \xrightarrow{-6} 60$

ce qui veut dire qu'il ne reste que 6×10 .
(et donc toujours se terminant par un 0).

Maintenant que nous avons présenté ces deux organisations mathématiques locales, nous pouvons préciser leurs articulations entre elles et avec d'autres organisations. Les recherches que nous menons actuellement semblent montrer qu'il est nécessaire de travailler conjointement ces deux organisations mathématiques locales, la première phase de l'OMP sur les équations pouvant être

proposée dès la classe de 6^e et, comme nous l'avons dit, la lettre pouvant être introduite dans les deux organisations. De plus, il est indispensable de travailler également sur des types de tâches de généralisation comme celle du carré bordé ou sur les tâches désignées sous le terme de « *patterns* ». En suivant Radford (2000, 2010, 2014) et le courant de l'*early algebra*, on peut penser que cette troisième organisation mathématique autour des types de tâches de généralisation peut être proposée dès l'école primaire en restant dans le domaine numérique et avec pour objectif la production d'une formule puis reprise au collège dans un cadre algébrique avec l'objectif d'une formule générale sous forme littérale.

9. Résultats sur les pratiques : les mises en train

En même temps que le groupe élaborait des activités de classe avec les programmes de calcul, les enseignants ont développé une gestion de classe originale privilégiant les apprentissages sur la durée basée sur des cycles dévolution/institutionnalisations locales/réinvestissements. Ils l'ont désignée sous le terme de « mise en TRAIN » : Travail de Recherche ou d'Approfondissement avec prise d'Initiatives (Martin Dametto, Piolti Lamorthe et Roubin, 2013). Les idées principales qui sont à l'origine de ce changement sont les suivantes. Tout d'abord rompre avec les pratiques ordinaires qui favorisent le découpage des notions en chapitres, comportant une évaluation finale sur laquelle on peut difficilement revenir. Il s'agit donc de favoriser des apprentissages dans la durée. Le deuxième élément porte sur la mise en recherche des élèves. Des problèmes sont proposés à tout moment des séquences d'enseignement et notamment au début, les procédures personnelles sont alors favorisées, puis grâce à des jeux sur les variables, certaines procédures sont abandonnées pour d'autres plus performantes qui peuvent alors être institutionnalisées (pour un temps ou de façon plus définitive), puis de nouveaux exercices sont proposés pour l'entraînement. Un nouveau cycle débute alors avec un autre type de problème (comme nous l'avons vu précédemment).

Enfin une dernière raison est d'ordre plus organisationnel puisqu'il s'agit de favoriser la mise au travail rapide des élèves. Ainsi quand ils entrent dans la classe, un exercice est déjà posé et les élèves se mettent immédiatement au travail sans temps mort.

Les programmes de calcul constituent un outil qui s'adapte bien à cette modalité de gestion de classe car il est possible de proposer un travail à partir d'un programme de calcul à chaque début de séance.

Grâce à ce dispositif de gestion de classe, les enseignants ont donc changé la structure de leurs séances (une séance dure 55 minutes) : le temps de mise en TRAIN qui dure, en général, 15 à 20 minutes, puis un temps court de correction d'exercices donnés à la maison et enfin le travail sur le chapitre en cours. Par cette gestion de classe, les élèves et plus généralement la classe sont davantage impliqués dans des activités de recherche.

Conclusion

Comme nous avons tenté de le montrer, malgré de nombreux travaux de recherche en didactique de l'algèbre et des évolutions de programmes plutôt favorables en France, les pratiques enseignantes ont du

mal à évoluer pour l'algèbre élémentaire et les difficultés des élèves persistent. Les travaux issus du groupe de recherche collaborative présentés ici tentent de remédier à ces difficultés en présentant des activités pour les classes de collèges français dans lesquelles l'activité des élèves et leur autonomie vis-à-vis des savoirs enseignés sont fortement privilégiées. Nous avons montré les potentialités des programmes de calcul pour travailler sur le long terme à la fois les différents types de tâches en algèbre, les techniques et les éléments technologiques et, pour conclure nous reprenons la citation de Chevallard (2007) :

Lorsque la notion d'expression algébrique est dûment introduite au collège comme mathématisant la notion de programme de calcul, un certain nombre de difficultés « traditionnelles » prennent un tout autre sens, quand elles ne disparaissent pas tout à fait. (p. 168)

Nous avons porté une insistance particulière sur l'aspect du travail collaboratif pour l'élaboration et la diffusion des ressources. Pour terminer il nous semble important de préciser que pour les enseignant.e.s, la participation à un tel projet a été l'occasion d'évolutions importantes dans leurs fonctions. L'animation de nombreuses formations continues sur l'algèbre a favorisé le développement de compétences nouvelles qui leur permet maintenant d'intervenir sur d'autres thèmes. Deux sont devenues formatrices en formation initiale, d'autres référent.e.s mathématique de circonscription.

Enfin ce travail nous donne aussi des indications pour la formation des enseignants. Tout d'abord le type de collaboration vue comme la construction d'un monde commun entre enseignant.e.s et chercheur.se.s a permis des évolutions que nous pensons durables à la fois pour et à partir des pratiques. La participation à deux projets européens de recherche a également été l'occasion de rapprocher les deux mondes. C'est un point qui nous semble très important pour les questions qui se posent sur la formation tant initiale que continue. Mais, bien sûr, cette collaboration nécessite un travail sur la durée et beaucoup d'investissement de chacun.e. On peut donc se demander à quelles conditions ce modèle peut être transposé dans le contexte actuel de la formation initiale ou continue dans différents pays.

Références

- Alves, C., Coppé, S., Duval, V., Goislard, A., Kuhman, H., Martin Dametto, S. et Roubin, S. (2013). Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège. *Repères IREM*, 92, 9-30.
- Assude, T., Coppé, S. et Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au Collège : Atomisation et réduction. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire : Bilan et perspectives* (p. 41-62). Grenoble : La pensée sauvage.
- Barnet, C., Billa, N., Layan, M.-C., Larrieu, M., Rudelle, F., Robertou, M., Demoulin, P., Flous, A., Laulhere, A., Villattes, A., Berger, H., Pollet-Mourlan, S., et Lafargue, B. (2016). *Mission indigo. Maths cycle 4*. Paris : Hachette Éducation.

- Bednarz, N. (2013). Regarder ensemble autrement : Ancrage et développement des recherches collaboratives en éducation au Québec. Dans N. Bednarz (dir.), *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement* (p. 13-30). Paris : L'Harmattan.
- Bednarz, N. et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem solving tool : Continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (p. 115-136). Dordrecht : Springer.
- Béguin, P. et Cerf, M. (2004). Formes et enjeux de l'analyse de l'activité pour la conception des systèmes de travail. *Activités*, 1(1), 54-71.
- Booth, L. (1985). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x*, 5, 5-17.
- Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.
- Chaachoua, H. (2015). Étude comparative des recherches sur l'apprentissage de l'algèbre élémentaire : Rapports croisés, bilan et perspectives. Dans D. Butlen, I. Bloch, M. Bosch, C. Chambris, S. Clivaz, G. Cirade et C. Mangiante Orsola (dir.), *Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et le système éducatif* (p. 21-39). Grenoble : La pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x*, 5, 51-94.
- Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : L'approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (dir.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques. Actes de l'Université d'été de didactique de La Rochelle* (p. 119-140). La Rochelle : IREM de Clermont Ferrand.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-265.
- Chevallard, Y. (2007). *Séminaire PLC2, année universitaire 2006-2007*.
Récupéré de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Seminaire_2006-2007.pdf
- Combiér, G., Guillaume, J. C. et Pressiat, A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège*. Paris : INRP.
- Constantin, C. (2014). *Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège?* [thèse de doctorat]. Université d'Aix-Marseille, France. Récupéré de <http://www.theses.fr/2014AIXM4090>
- Coppé, S. et Grugeon-Allys, B. (sous presse). Le calcul littéral au collège. Quelle articulation entre sens et technique ? Dans CORFEM, *Ressources pour la formation des professeurs. Savoirs mathématiques à enseigner au collège et au lycée*.
- Coppé, S. et Grugeon-Allys, B. (2015). Étude multidimensionnelle de l'impact des travaux de recherche en didactique dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire : Quelles évolutions ? Quelles contraintes ? Quelles perspectives ? Dans D. Butlen, I. Bloch, M. Bosch, C. Chambris, G. Cirade, S.

- Clivaz et C. Mangiante Orsola (dir.), *Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et le système éducatif* (p. 41-74). Grenoble : La pensée sauvage.
- Coppé, S., Grugeon-Allys, B. et Pilet, J. (2016). Conditions pour diffuser des situations issues de la recherche en didactique des mathématiques : L'exemple du carré bordé. *Petit x*, 102, 57-80.
- Coulange, L., Drouhard, J.-P., Dorier, J.-L., et Robert, A. (dir.) (2012). *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives*. Grenoble : La pensée sauvage.
- Coulange, L. et Grugeon-Allys, B. (2008). Pratiques enseignantes et transmission de situations d'enseignement en algèbre. *Petit x*, 78, 5-23.
- Desgagné, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : L'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*, 23(2), 371-393.
- Drouhard, J. P. (1995). Algèbre, calcul symbolique et didactique. Dans R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (dir.), *Actes de la 8e Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques* (p. 325-344). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.
- Gascón, J. (1993). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternance à « l'arithmétique généralisée ». *Petit x*, 37, 43-63.
- Grangeat, M. (2013). Modéliser les enseignements scientifiques fondés sur les démarches d'investigation : Développement des compétences professionnelles, apport du travail collectif. Dans M. Grangeat (dir.), *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation* (p. 199-234). Grenoble : Presses universitaires de Grenoble.
- Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. Dans P. Nesher et J. Kilpatrick (dir.), *Mathematics and cognition. A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education* (p. 96-112). Cambridge, UK : Cambridge University Press.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels : Building meaning for symbols and their manipulations. Dans F. K. Lester (dir.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 707-762). Greenwich, CT : NCTM.
- Mangiante Orsola, C. (2014). Une étude du processus d'appropriation par des enseignants de situations produites par la recherche pour l'enseignement de la géométrie. Dans S. Coppé et M. Haspekian (dir.), *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques de 2013* (p. 137-158). Lille Nord de France : IREM de Paris 7.
- Martin Dametto, S., Piolti Lamorthe, C. et Roubin, S. (2013). TRAIN : Travail de Recherche ou d'Approfondissement avec prise d'Initiative. *Bulletin de l'APMEP*, 502, 11-22.
- Ministère de l'Éducation nationale [MEN] (2005). *Bulletin officiel l'Éducation nationale n° 5 du 25 août 2005*.
- Ministère de l'Éducation nationale [MEN] (2014). *Cedre 2014 mathématiques en fin de collège. Les dossiers de la DEPP n° 209*.

- Ministère de l'Éducation nationale [MEN] (2015). *Bulletin officiel spécial n° 11 du 26 novembre 2015*.
Récupéré de http://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/35/1/BO_SPE_11_26-11-2015_504351.pdf
- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking : A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 237-268.
- Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12, 1-19.
- Radford, L. (2014). the progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Group of Australasia*, 26, 257-277.
- Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* [thèse de doctorat]. Barcelone : Université Autonome de Barcelone, Espagne.
Récupéré de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=22189>
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Tirosh, D., Even, R. et Robinson, N. (1998). Simplifying algebraic expressions : Teacher awareness and teaching approaches. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 51-64.
- Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. Dans C. Laborde (dir.), *Actes du Colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (p. 189-199). Grenoble : La pensée sauvage.

Chapitre 2

Les problèmes de généralisation à l'école élémentaire. Une étude française

Floriane Wozniak

Université de Montpellier

floriane.wozniak@umontpellier.fr

Résumé

Les travaux relatifs à ce que les anglo-saxons nomment *the early algebra thinking* (Kieran, Pang, Schifter et Ng, 2016) envisagent les conditions de la mise en œuvre dès l'école primaire et « avant la lettre » de praxéologies algébriques. Radford (2014) a ainsi montré le rôle essentiel que peuvent jouer les problèmes de généralisation. L'objet de ce chapitre est d'étudier leurs potentialités au sein du curriculum français où la problématique de l'« *early algebra* » n'est pas posée. Les conditions didactiques d'une telle transition de l'école élémentaire vers le collège sont envisagées à partir de l'observation de la résolution de trois problèmes de généralisation à la fin de l'école primaire. Ce chapitre montre comment l'étude du problème inverse plutôt que la demande de l'expression du cas général appelle un travail mathématique sur la raison d'être et le sens de cette expression permettant de construire un rapport de nécessité.

Mots-clés

Problème de généralisation, problème inverse, arithmétique, algèbre, praxéologie, *early algebra*

Introduction

Chevallard et Bosch (2012, p. 37) ont montré comment les évolutions successives des programmes d'enseignement en France ont conduit à une forme de « dénaturation de l'algèbre enseignée ». Et il n'y a pas de progressivité dans l'apprentissage de l'algèbre en France, contrairement à l'enseignement de la géométrie ou des nombres. Ainsi, alors que de nombreux travaux attestent de l'intérêt, voire de la nécessité, d'un enseignement plus progressif qui débiterait dès l'école primaire (Squalli, chap. [Introduction](#)) l'algèbre est introduite en classe de 4^e, c.-à-d. en 3^e année du secondaire (élèves de 13 à 14 ans). L'objet de ce chapitre est donc d'explorer la question d'une entrée progressive dans l'algèbre en France, non comme une nécessité curriculaire mais comme une potentialité. Ce type de questionnement s'inscrit dans ce que Chevallard (2011) appelle la problématique possibiliste :

Étant donné un certain ensemble de conditions et de contraintes auxquelles telle institution ou telle personne est soumise, à quels systèmes praxéologiques est-il possible que cette institution ou cette personne accède? (p. 91)

La problématique possibiliste, concernant un enseignement progressif de l'algèbre depuis l'école primaire conduit donc à considérer les conditions favorables d'une première rencontre avec les praxéologies algébriques dès l'école primaire.

En théorie anthropologique du didactique, toute activité humaine peut se modéliser en termes de praxéologie : un type de tâche pour être accompli met en œuvre une ou des techniques qui peuvent être décrites, justifiées, développées sur la base d'un discours technologique qui s'inscrit lui-même au sein d'une théorie. Type de tâche et technique constituent le bloc *praxis* tandis que technologie et théorie forment le bloc *logos*. Dans ce texte, je ne parlerai donc pas de « pensée algébrique » mais de « praxéologie algébrique » car l'algèbre se réfère autant à des types de tâches, qu'à des techniques ou des éléments théoriques. Ce faisant, la problématique posée dans ce texte peut s'exprimer sous la forme de questions : les choses étant ce qu'elles sont dans le système éducatif français, qu'est-il possible de proposer aux élèves du cycle 3 (CM2-6^e, enfants de 10 à 12 ans) ou au début du cycle 4 (en 5^e, deuxième année du secondaire) pour leur permettre une découverte progressive de l'algèbre, de ses raisons d'être et de ses techniques? Quels sont les types de tâches et les objets mathématiques qui conduisent progressivement vers le déploiement de praxéologies algébriques?

Une synthèse des travaux de recherche issus du mouvement « *early algebra* » montrent l'étendue des points de vue quant aux éléments qui caractérisent les praxéologies algébriques :

Blanton *et al.* (2011) argue that mathematical structure and relationships are central to the practice of early algebra. For Britt and Irwin (2011), early algebraic thinking involves coming to use numbers and words to express arithmetic transformations in general terms. Carraher and Schliemann (2015) characterize early algebraic thinking in terms of basic forms of reasoning that express relations among number or quantities, in particular, functional relations. In these studies and others, mathematical relations, patterns, and arithmetical structures are deemed to be at the heart of early algebraic thinking (Kieran *et al.*, 2016, p. 10).

Cependant le point de convergence de ces recherches sur le développement d'un enseignement de l'algèbre dès l'école primaire est de considérer le processus de généralisation au cœur des praxéologies algébriques. Mais comment définir une généralisation algébrique? Squalli (2015) distingue la généralisation qui est un processus de la généralité qui en est le produit. Il propose ainsi de considérer qu'

[u]ne généralisation est algébrique quand la généralité produite peut être représentée dans le registre algébrique, par exemple par une expression faisant intervenir un nombre fini de fois, des opérations, des nombres, des lettres, des mots, des symboles (p. 348)

Pour Demonty, Vlassis et Fagnant (2018), la généralité est issue de la reconnaissance d'une régularité et ainsi généraliser, c'est identifier/reconnaître une régularité. Ces auteures caractérisent la généralisation algébrique en fonction du type de raisonnement associé :

Algebraic generalisation comes about through identifying a regular pattern based on observation of the terms known. This approach is called abduction. Deduction is then necessary in order to use the observed regularity to produce an expression for any term in the sequence, whether this is close to or distant from a known term (p. 4).

Au regard de son intérêt didactique, ce chapitre s'intéresse à la résolution de problèmes dit de généralisation, c'est-à-dire des problèmes dont la résolution conduit à mettre en œuvre un processus de généralisation, l'identification d'un modèle (un « *pattern* »).

1. Question de recherche

La problématique possibiliste conduit à étudier si compte tenu des conditions qui prévalent dans le système d'enseignement, il est possible que les élèves « rencontrent » et travaillent les problèmes dits de généralisation à l'école primaire. Pour cela, une analyse écologique est requise :

Un objet ne pouvant pas vivre isolé, il sera nécessaire de faire vivre un complexe d'objets autour de [lui]. Il convient donc d'examiner les différents lieux où l'on trouve [cet objet] et les objets avec lesquels [il] entre en association, ce qu'on appellera les habitats. Puis, regarder en chacun de [ses] habitats, la niche écologique qu'[il] occupe, c'est-à-dire en quelque sorte, la fonction qui est la [sienne] (Artaud, 1997, p. 111).

Pour considérer la faisabilité de la conduite de l'étude de ces problèmes, il faut donc déterminer s'il est envisageable de les proposer à des enseignants de la fin de l'école primaire : dans quelles

conditions, une expérimentation en classe autour de ces problèmes est-elle possible? A minima, les problèmes de généralisation qui seront expérimentés doivent être *compatibles* avec les programmes d'enseignement de l'école primaire, alors même qu'ils n'y figurent pas explicitement.

1.1. Une légitimité institutionnelle

Considérant l'étude des structures des opérations et des nombres (Pilet et Grugeon-Allys, [chap. 3](#)) ont montré que des éléments constitutifs de praxéologies algébriques sont présents dans le curriculum de l'école primaire en France. Concernant les problèmes de généralisation, un habitat possible est l'étude des « problèmes pour chercher » institués pour la première fois dans les programmes de l'école primaire en France en 2002. Les programmes actuels stipulent en effet :

On veille aussi à proposer aux élèves des problèmes pour apprendre à chercher qui ne soient pas directement reliés à la notion en cours d'étude, qui ne comportent pas forcément une seule solution, qui ne se résolvent pas uniquement avec une ou plusieurs opérations mais par un raisonnement et des recherches par tâtonnements (Ministère de l'Éducation nationale [MEN], 2015, p. 197).

Les enseignants sont donc invités à proposer à leurs élèves des problèmes qui ne visent pas à introduire un nouveau savoir ou à réinvestir des praxéologies en cours d'acquisition mais à développer des compétences pour construire un rapport aux savoirs proche de la démarche d'investigation.

Les programmes de l'école primaire et du collège¹ entrés en vigueur en septembre 2015 présentent d'emblée les « 6 compétences travaillées » en mathématiques : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer. Ainsi, les élèves doivent apprendre à « Prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution de problèmes à partir de supports variés : textes, tableaux, diagrammes, graphiques, dessins, schémas, etc. » ou à « S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle » (MEN, 2015, p. 197). L'introduction de la modélisation dès l'école élémentaire est une nouveauté qui s'inscrit dans un changement de paradigme scolaire (voir Wozniak, 2019) largement partagés dans divers pays (voir Barquero, Florensa, Jesse, Lucas et Wozniak, 2018). Il y a là une condition favorable à l'introduction progressive de l'algèbre : « Si la modélisation algébrique relève avant tout du cycle 4 et du lycée, la résolution de problèmes permet déjà de montrer comment des notions mathématiques peuvent être des outils pertinents pour résoudre certaines situations. » (MEN, 2015, p. 197).

Ainsi, pour résumer la situation institutionnelle avec les mots de l'analyse écologique : les problèmes pour chercher constituent un habitat potentiel, tandis que les problèmes de généralisation sont une niche écologique possible pour l'introduction de praxéologies algébriques dès la fin de l'école

¹ L'école maternelle constitue le cycle 1 (enfants de 3 à 5 ans), l'école élémentaire est constituée du cycle 2 (enfants de 6 à 9 ans) et du cycle 3 (enfants de 9 à 12 ans) qui déborde sur la première année du collège, tandis que le cycle 4 regroupe les trois dernières années du collège (enfants de 12 à 15 ans).

primaire. Dans la perspective d'une évolution curriculaire, il est d'autant plus pertinent de considérer ce type de problèmes, qu'ils sont présents dans l'enseignement secondaire à travers plusieurs documents accompagnant les programmes². Leur étude pourrait alors constituer une sorte de fil rouge dans la scolarité.

Ce sont des conditions favorables qui rendent possible – car institutionnellement légitime – la résolution de problèmes de généralisation en classe à l'école primaire. C'est ainsi que trois professeurs ont accepté de proposer à leurs élèves de CM1 ou CM2 (4^e et 5^e années de l'école élémentaire, élèves de 9 à 11 ans) d'étudier de tels problèmes.

1.2. Praxéologies et entrée progressive dans l'algèbre

Comme dans le programme de recherche de *early algebra*, le point de vue développé dans ce chapitre ne limite pas les praxéologies algébriques aux praxéologies qui font explicitement appel à l'écriture algébrique. Luis Radford (2014) considère qu'un élève témoigne d'une « pensée algébrique » lorsque trois éléments caractéristiques sont présents :

- le traitement d'une ou plusieurs valeurs inconnues (indétermination) ;
- la production d'ostensifs associés aux valeurs indéterminées (la dénotation) ;
- l'opération sur des valeurs indéterminées comme avec des valeurs connues (raisonnement analytique).

S'agissant d'étudier les conditions d'une introduction progressive des praxéologies algébriques, c'est-à-dire d'une transition progressive de l'arithmétique vers l'algèbre, le point de vue adopté ici n'est pas d'attendre que les élèves déploient des praxéologies algébriques fondées sur les trois caractéristiques définies par Luis Radford. Il s'agit plutôt de considérer les praxéologies généralisatrices, c'est-à-dire des praxéologies qui intègrent la reconnaissance de régularités comme premiers pas vers le développement et l'acquisition de praxéologies algébriques. Dès lors que les problèmes de généralisation n'auront pas été enseignés préalablement à l'observation, la question étudiée dans ce chapitre est :

Les problèmes proposés aux élèves constituent-ils un milieu suffisant pour que les élèves produisent des praxéologies généralisatrices spontanées, c'est-à-dire sans enseignement du professeur?

2. Méthodologie

Une observation de l'étude de trois problèmes a été organisée dans la classe de trois professeurs volontaires. Ces trois problèmes ouvrent différentes voies d'accès vers l'algèbre : la généralisation, la résolution d'équations et la détermination de l'expression d'une fonction³. Les deux premiers problèmes sont des problèmes de généralisation pour lesquels la recherche du problème inverse – associée à la

² Par exemple « Utiliser le calcul littéral. Un exemple de question à prise d'initiative. Les carrés bordés » : http://cache.media.education.gouv.fr/file/Calcul_litteral/29/8/RA16_C4_MATH_nombres_calcul_calcul_litteral_initiative_carre_bordes_548298.pdf

³ Une suite étant une fonction particulière.

fonction réciproque du problème initial – conduit à résoudre une équation. Le dernier problème demande explicitement l'expression de la fonction qui est représentée dans l'énoncé par une table de valeurs. Ces problèmes ont été envoyés aux enseignants (Annexe 1) par messagerie électronique dans un format qui permettait de changer leur ordre ou leur forme.

2.1. Les problèmes

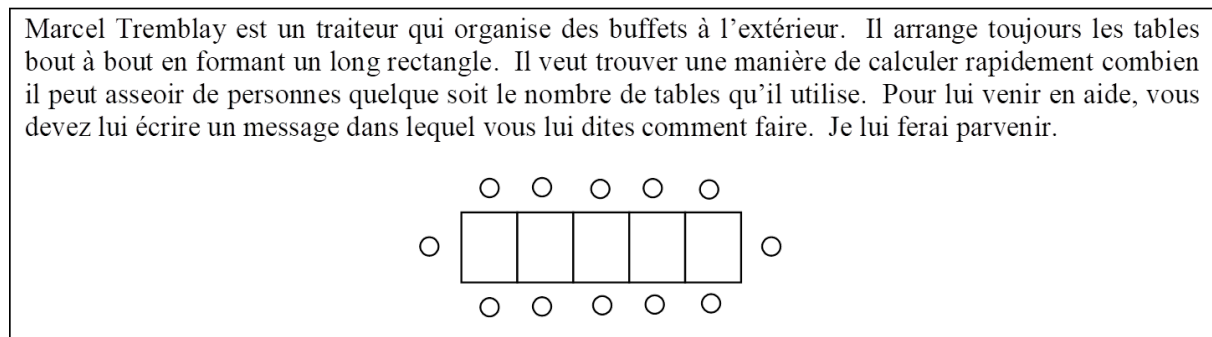
J'ai proposé aux professeurs de travailler sur une série de trois problèmes, plutôt qu'un seul, afin que les procédures des élèves s'enrichissent progressivement. L'observation des praxéologies spontanées des élèves permet ainsi d'envisager le potentiel de cette série de trois problèmes pour le développement de praxéologies généralisatrices par des élèves de la fin de l'école primaire (de 9 à 11 ans).

Deux des problèmes sont des problèmes de dénombrement dans un contexte figuratif donnant une possibilité de répondre par le dessin afin que tous les élèves s'engagent dans la résolution des problèmes. Le troisième problème a un contexte purement numérique.

2.1.1. Le choix des variables didactiques

Le problème « À table! » est une adaptation d'un problème classique présent dans de nombreuses recherches ou dans certains curriculums. Contrairement à Mary, Squalli et Schmidt (2014), je n'ai pas choisi de proposer une seule image avec du matériel qui favorise selon ces auteurs un travail sur la structure du modèle (Figure 1).

Je n'ai donc pas suggéré aux enseignants d'utiliser un matériel – sans l'interdire non plus – afin de préserver leur liberté d'organisation. En effet, dans Mary *et al.* (2014) les élèves, par effet de contrat didactique, ont utilisé le matériel fourni et fait des calculs sans recourir aux dessins. L'hypothèse sous-jacente à ce choix est qu'en absence de matériel les élèves auront recours au dessin, en particulier dans notre cas où les trois premiers schémas sont donnés. Le problème « Les cure-dents » est une adaptation de celui proposé par Radford (2004) dans lequel les trois premières figures étaient données dans l'énoncé (figures à 1, 2 et 3 triangles) alors qu'il était demandé le nombre de cure-dents dans la figure 25.

Figure 1*Problème « Les tables de Marcel »*

Source. Mary, Squalli et Schmidt (2014).

À côté de ces deux problèmes fondés sur la recherche d'un modèle figuratif, j'ai ajouté le problème « Les machines » ([Annexe 1](#)) afin d'introduire un problème de recherche de modèle numérique. Il s'agit en effet de déterminer l'expression d'une fonction qui pourrait être associée à une série donnée de couples (antécédent, image). Les régularités des deux premiers problèmes sont représentées sous forme de dessin, et sous forme de tableaux de valeurs pour le troisième problème.

Dans les recherches portant sur les problèmes de généralisation, il est généralement demandé aux élèves de déterminer les résultats pour quelques cas particuliers puis une expression du cas général. Un autre choix a été fait ici. Plutôt que de demander explicitement l'expression du cas général, les élèves ont à étudier le problème inverse pour une valeur donnée afin que la recherche du cas général leur apparaisse comme un besoin pour répondre à une question (dimension apodictique des savoirs). D'autre part, l'objectif n'est pas que les élèves produisent des expressions algébriques mais qu'ils perçoivent la raison d'être de l'algèbre : l'étude des problèmes inverses conduit à construire un rapport de nécessité à la formalisation du processus, la nécessité de généraliser. Même s'il est possible d'y répondre en étudiant les différents cas, l'étude du problème inverse est une occasion d'entrer dans l'analyticité.

Concernant les deux premiers problèmes (contexte figuratif), les choix faits sont :

- recherche du cas suivant celui de l'énoncé (3 ou 4) puis d'un cas particulier proche (10) ;
- recherche d'un cas particulier plus lointain (25) ;
- recherche du problème inverse sur un cas intermédiaire aux précédents.

La recherche du cas suivant puis d'un cas particulier proche permet la dévolution du problème en facilitant le recours au dessin. Ainsi chaque élève peut s'approprier le processus qui lie les données entre elles (le nombre de tables/le nombre de personnes ou chaises et le n  de la figure/le nombre de cure-dents). La recherche d'un cas plus lointain vise à induire une étude du processus qui évite le dessin, tandis que la recherche du problème inverse a pour objectif d'amener les élèves à une formulation du processus de généralisation. Dans ces problèmes, la taille des nombres permet toujours de répondre aux questions en faisant un dessin, même si la formulation numérique du processus est plus efficace. Dans les conditions de l'étude, il est nécessaire que ce qui est proposé aux enseignants soit « acceptable » pour eux, c'est-à-

dire compatible avec les usages à l'école, comme par exemple, utiliser le dessin dans les problèmes de recherche. Je fais ainsi l'hypothèse que le recours aisé au dessin est une condition d'acceptabilité des problèmes par les professeurs et les conduira à choisir de proposer en premier les problèmes de contexte figuratif. Ce faisant, le travail réalisé sur ces deux problèmes devrait servir de milieu pour l'étude du problème « Les machines » à contexte numérique, lui-même fait de trois études. Les questions portent sur un nombre qui n'est pas le suivant de ceux donnés dans l'énoncé (il faut donc que les élèves repèrent qu'il y a un « saut ») et sur l'identification de la relation fonctionnelle. J'ai donc fait les choix :

- recherche d'un cas particulier proche (10) plutôt que du cas suivant (6) ;
- recherche du cas général.

Les deux premières relations fonctionnelles sont respectivement une addition et une multiplication rejoignant la proposition de Carraher, Schliemann et Brizuela (2000) qui préconisent d'aborder les opérations comme des fonctions dès l'école élémentaire.

Enfin, le choix a été fait de varier la fonction des nombres dans ces trois problèmes. Le problème « À table! » associe un nombre cardinal à un nombre cardinal ; le problème « Les cure-dents » associe un nombre ordinal à un nombre cardinal et le problème « Les machines » n'offre aucun contexte et ne traite que de nombres pour eux-mêmes.

Les problèmes étudiés se modélisent par des fonctions algébriques. De façon à donner une cohérence à l'ensemble de ces problèmes, les relations qui rendent compte des processus de généralisation peuvent être mis en perspective. Ceci apparaît nettement lorsqu'on considère en détail les techniques de résolution que les élèves peuvent mettre en œuvre pour résoudre ces problèmes.

2.1.2. Les techniques de résolution

Concernant les techniques de résolution, trois types sont envisageables que je nommerai par la suite « dessin », « relation de récurrence » et « relation fonctionnelle ». La technique « dessin » consiste à représenter n tables ou la n^e figure en cure-dents (Figure 2).

Cette technique repose sur la seule représentation de la situation et le dénombrement. Le simple fait de dessiner puis dénombrer permet en effet de répondre aux questions.

Le processus de construction des n tables ou de la n^e figure étant itératif, le dessin des premiers cas peut conduire l'élève à identifier l'existence d'une régularité d'une étape à une autre grâce aux ostensifs graphiques. Dans la figure 3, l'élève associe au nombre de tables, le nombre de personnes successivement, pour toutes les valeurs, sans calcul, ni dessin. L'ajout de 2 d'un résultat à un autre semble alors indiquer que l'élève a identifié ce qui est le « moteur » du processus, à savoir qu'à l'ajout d'une nouvelle table est associé deux nouvelles personnes. Au passage, on constate un usage du signe égal inhabituel à l'école, puisqu'il désigne une mise en relation entre deux grandeurs.

Figure 2

Problème « cure-dents » photo 41 classe de P2

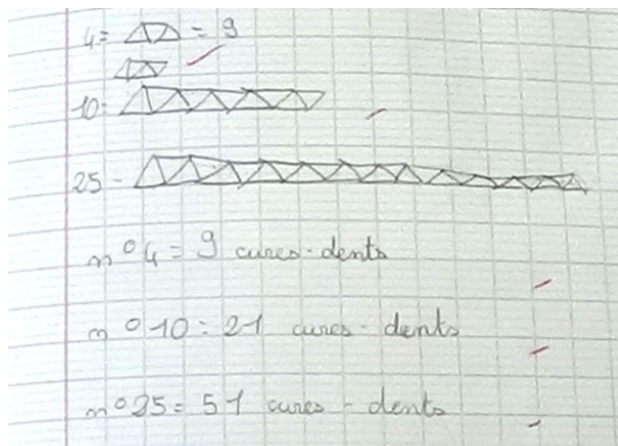


Figure 3

Problème « À table! » photo 54 classe de P2⁴

1 = 4	7 = 16	13 = 28	19 = 40
2 = 6	8 = 18	14 = 30	20 = 42
3 = 8	9 = 20	15 = 32	21 = 44
4 = 10	10 = 22	16 = 34	22 = 46
5 = 12	11 = 24	17 = 36	23 = 48
6 = 14	12 = 26	18 = 38	24 = 50

La technique « relation de récurrence » repose sur l'identification d'une relation entre les résultats successifs qui peut se nourrir de l'observation des résultats obtenus par la technique « dessin » sur les premiers cas. Cette technique repose sur la recherche et l'identification d'un invariant entre deux termes successifs, c'est-à-dire un accroissement constant. La technique⁵ « relation fonctionnelle », comme son nom le laisse supposer, repose sur la recherche d'une relation entre le nombre de départ (le nombre de tables, le numéro de la figure, l'antécédent) et le résultat associé (le nombre de personnes ou de chaises, le nombre de cure-dents, le nombre image). L'établissement de la relation fonctionnelle repose sur une décomposition spatiale du modèle de la situation. Par exemple, dans le problème « À table! » il est possible de considérer qu'il y a 2 rangées de chaises de part et d'autre des tables et deux chaises en bout, mais on peut aussi considérer – pour un nombre de tables supérieur à 2 – qu'il y a 3 chaises autour des

⁴ La photo initiale étant de mauvaise qualité, la production de l'élève a été copiée.

⁵ Les fonctions considérées étant à valeurs dans \mathbb{N} , le modèle mathématique est une suite.

tables en bout et 2 chaises de part et d'autre des autres tables. Chacune de ces décompositions spatiales conduit à une dénotation différente de la relation fonctionnelle : $T(n) = 2n + 2$ dans le premier cas ou $T(n) = 6 + 2(n - 2)$ dans le second. Le tableau 1 explicite la relation fonctionnelle (dans sa forme réduite) et la relation de récurrence pour les trois problèmes.

Tableau 1

Techniques « relation fonctionnelle » et « relation de récurrence » pour les trois problèmes

<i>Techniques</i> <i>Problèmes</i>	« Relation fonctionnelle »	« Relation de récurrence »
« À table! »	$T(n) = 2n + 2$ où n est le nombre de tables et $T(n)$ le nombre de personnes	$T(n + 1) - T(n) = 2$
« Les cure-dents »	$F(n) = 2n + 1$ où n est le n° de la figure et $F(n)$ le nombre de cure-dents	$F(n + 1) - F(n) = 2$
« Les machines »	$A(n) = n + 2$; $B(n) = 3n$; $C(n) = 2n + 1$ où n est le nombre entré dans la machine	$A(n + 1) - A(n) = 1$ $B(n + 1) - B(n) = 3$ $C(n + 1) - C(n) = 2$

Comme cela a déjà été mentionné, les relations numériques qui rendent compte des processus de généralisation de ces trois problèmes se retrouvent d'un problème à l'autre, afin que le milieu s'enrichisse progressivement. L'hypothèse qui est faite est que les professeurs pourront s'appuyer sur ces « ressemblances » numériques pour mettre en perspective les problèmes et avoir une approche plus structurale que procédurale des relations. Ainsi, les 2 problèmes à contexte figuratif ont la même relation de récurrence mais pas la même relation fonctionnelle. L'écart de 2 (relation de récurrence) dans les deux problèmes à contexte figuratif, se retrouve dans la relation fonctionnelle de la machine A puisque $A(n) = n + 2$ alors que sa relation de récurrence est de 1 : $A(n + 1) - A(n) = 1$. Le problème « Les cure-dents » et la machine C ont la même relation fonctionnelle (donc aussi la même relation de récurrence).

2.2. Le protocole d'observation

Les séances observées ont été filmées depuis un lieu fixe au fond de la classe avec la caméra dirigée vers le tableau ou les groupes pendant les phases de recherches. Le professeur portait un microphone. Les affiches ont été collectées, ainsi que les feuilles de brouillon tandis que les cahiers ont été photographiés. Je suis restée dans une position de retrait au fond de la classe, sans intervenir ni me déplacer parmi les élèves.

Afin d'observer des pratiques d'enseignants « spontanées », les énoncés de problèmes ont été donnés sans aucune indication particulière. Les professeurs avaient une totale liberté, aucune contrainte d'organisation de la classe (travail individuel, en binômes ou en groupes), d'organisation de l'étude (le nombre de séances était libre) ou dans l'ordre d'étude des trois problèmes. Cependant, les trois professeurs observés (nommés P1, P2, P3 par la suite) ont fait des choix du fait de ma présence. C'est

évidemment une limite à l'étude des praxéologies des professeurs mais pas de la question abordée ici, les praxéologies spontanées des élèves. Ainsi, P1 a choisi de traiter deux problèmes dans une même séance pour limiter mes déplacements. Le professeur P2 a volontairement varié l'organisation de la classe pour me montrer des manières de travailler différentes. Enfin, à l'issue de la première séance j'ai demandé au professeur P3 de traiter le problème « Les machines » lors de la séance suivante pour varier l'ordre des problèmes par rapport à P1. Le tableau 2 résume l'ordre de traitement des problèmes et l'organisation de la classe (I : individuel ; B : binôme ; G : groupe) suivi de ce que les élèves ont produit (une affiche, une reprise de leur travail sur cahier).

Tableau 2

Ordre des problèmes et organisation dans les trois classes

P1	« À table! » I, B, G : affiche	« Les cure-dents » et « Les machines » I, G : affiche	
P2	« Les cure-dents » I, B : affiche, cahier	« À table! » I, G : affiche, cahier	« Les machines » G : affiche, cahier
P3	« À table » I, G : affiche	« Les machines » I, G : affiche	« Les cure-dents » I, G : affiche

Aucun enseignant n'a donc choisi de commencer par étudier le problème « Les machines », l'absence de contexte qui engage les élèves vers des solutions élémentaires en recourant par exemple aux dessins explique certainement ce non-choix. Dans la suite de ce chapitre, je ne rendrai compte que de l'observation de la classe de P2 en illustrant mon propos à partir des cahiers d'élèves. En effet, je fais l'hypothèse que ce qui est transcrit dans les cahiers correspond à ce que les élèves ont retenu ou compris de l'étude des problèmes pour deux raisons. D'une part, les élèves écrivent la solution d'un problème dans leur cahier à la fin de l'étude, c'est-à-dire après qu'ils l'aient cherché individuellement puis en binôme ou en groupe et après que la mise en commun (où professeur et élèves commentent et valident les différentes procédures) soit réalisée. D'autre part, le professeur n'impose pas une correction, ce sont bien les élèves qui choisissent ce qui restera comme « leur » solution du problème considéré.

3. Résultats : les procédures des élèves

3.1. Le rôle du dessin

3.1.1. Le recours au dessin

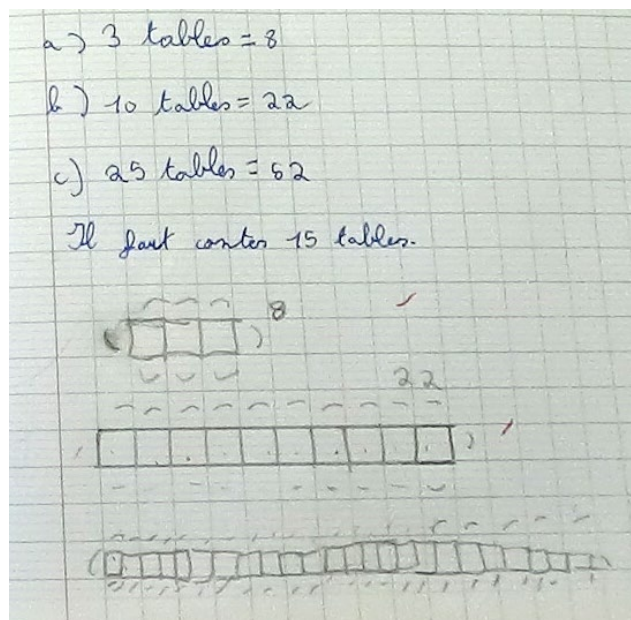
Dans la classe de P2 (Tableau 2), le premier problème étudié est « Les cure-dents ». Pour résoudre ce problème les élèves ont d'abord fait des recherches individuelles, puis ils ont conçu en binômes une affiche. Si toutes les feuilles de recherche comportent un dessin, seulement trois affiches sur dix en comportent un. Une fois la mise en commun réalisée et les différentes réponses analysées collectivement, les élèves ont été invités à écrire leur solution dans leur cahier où cinq élèves sur vingt-et-un ont fait un dessin. Lors de la séance suivante, le problème « À table! » a d'abord fait l'objet d'une recherche individuelle puis d'un travail en groupes avec production d'une affiche et une fois la mise en commun

réalisée, l'écriture dans le cahier de la solution de chacun. Trois feuilles de recherche individuelle (sur vingt-et-un), deux affiches (sur cinq) et onze cahiers (sur vingt-et-un) ne comportent pas de dessin. Massivement utilisé lors des recherches individuelles pour l'étude du problème précédent, le dessin ne semble plus aussi indispensable ou du moins son usage évolue.

Dans un premier temps, en particulier dans la phase de recherche, les dessins reproduisent les différents cas possibles successivement et ainsi permettent de produire la solution. Il n'est cependant pas nécessaire de reproduire tous les cas successivement puisque le procédé de construction de l'ensemble des n tables ou de la n^{e} figure en cure-dents est itératif. Il suffit de produire la figure ou l'ensemble des tables alignées puis de dénombrer les cure-dents ou les personnes pour répondre aux questions. Un tel procédé est rendu possible par la taille des nombres de l'énoncé qui ne rend pas suffisamment fastidieux le processus. Dans les cahiers d'élèves deux fonctions des dessins sont aisément identifiables : le dessin pour produire la réponse, comme dans la figure 2 ou le dessin pour valider une réponse comme dans la figure 5 où le dessin apparaît après les réponses et où la trace du dénombrement des personnes (ou des chaises) est perceptible.

Figure 5

Problème « À table! » photo 55 classe de P2



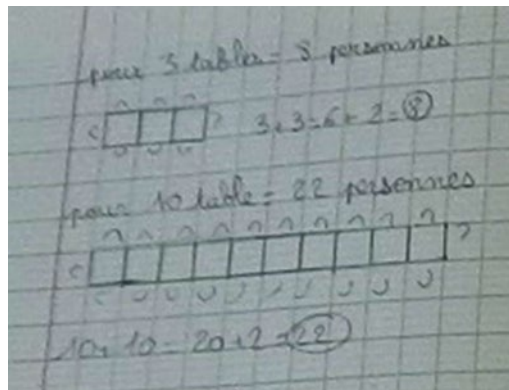
Cependant le dessin a une troisième fonction qui conduit à établir la relation fonctionnelle.

3.1.2. Du dessin à la relation fonctionnelle

Le dessin n'est pas seulement une technique pour produire ou valider la réponse, il peut se constituer en milieu avec lequel l'élève va interagir. C'est ce qu'illustre la figure 6.

Figure 6

Problème « À table! » partie de la photo 53 classe de P2



Le calcul $3 + 3 = 6$ exprime le nombre de personnes (ou de chaises) de part et d'autre des tables alignées et le calcul $6 + 2 = 8$ rend compte de l'ajout des deux chaises en bout de tables. On retrouve le même procédé pour le calcul du nombre de personnes pour 10 tables : « $10 + 10 = 20 + 2 = 22$ ». Or à la suite, l'élève donne le nombre de personnes qui pourront s'asseoir autour de 25 tables immédiatement, comme si le calcul avait été fait mentalement, suivi d'un dessin qui ne sert alors qu'à valider le résultat produit (Annexe 2). A la suite se trouve la réponse à la question de recherche du problème inverse (le nombre de personnes est fixé à 32, il faut trouver le nombre de tables nécessaires) précédée de la relation fonctionnelle en langue naturelle : « il faut multiplier par 2 et on ajoute 2. Il faut 15 tables ». Nulle trace qui dise comment la relation fonctionnelle qui produit le nombre de tables connaissant le nombre de personnes est utilisée pour résoudre le problème inverse. Néanmoins, ce que nous observons ici est une mise en relation des ostensifs « dessins » et « calculs » produisant un troisième ostensif, langagier cette fois, qui explicite la relation fonctionnelle.

L'observation des feuilles de recherche, des affiches et des cahiers laissent supposer que les dessins permettent de comprendre la nature du processus en jeu et qu'une fois le processus identifié, la régularité perçue, ils n'avaient plus vraiment d'utilité. Ainsi, en considérant les deux problèmes à contexte figuratif, 9 élèves sur 21 n'ont fait aucun dessin dans leur cahier à l'issue de leur recherche individuelle puis collective (en binôme ou en groupe) suivie de la mise en commun.

Concernant le rôle du dessin dans l'étude des deux problèmes avec contexte figuratif, trois fonctions distinctes sont identifiées : 1) produire la réponse en reproduisant le processus selon un procédé itératif qui conduit à représenter les cas successivement ; 2) valider la réponse lorsqu'elle a été calculée ; 3) constituer un milieu en produisant des ostensifs sur lesquels s'opère l'identification de la régularité du processus.

Ce qui paraît essentiel ici, c'est la condition de production de la relation fonctionnelle : une articulation des dessins et des calculs qui passe par un changement de statut du dessin. Mais considérons à présent les deux techniques fondées sur les valeurs numériques.

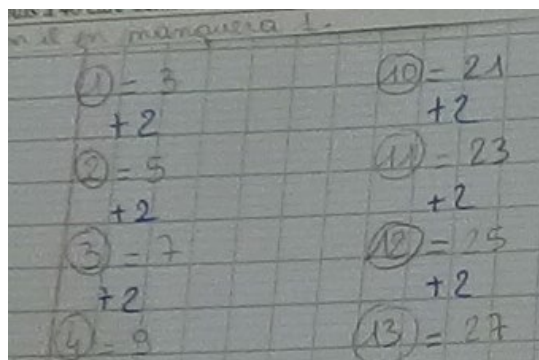
3.2. De la relation de récurrence à la relation fonctionnelle

Les problèmes à contexte figuratif proposés aux élèves ne demandent pas de façon explicite la relation fonctionnelle selon l'hypothèse que l'étude du problème inverse devrait conduire les élèves à passer du travail sur les écarts (relation de récurrence) au travail sur la structure (relation fonctionnelle).

Dans la classe observée, en dehors de la technique « dessin », c'est la technique « relation de récurrence » qui est privilégiée. Selon Carraher, Martinez et Schliemann (2008), une présentation de plusieurs cas successivement dans un contexte figuratif ou une présentation tabulaire dans un contexte numérique induirait le recours à la technique « relation de récurrence ». C'est ainsi que l'observation des cahiers montre que 16 des 21 élèves donnent explicitement la relation de récurrence pour le problème « Les cure-dents », soit par une formulation du type « à chaque fois il faut rajouter 2 cure-dents » soit en explicitant par le calcul le processus itératif associé à l'ajout de 2. De ce point de vue, la figure 7 illustre l'inventivité des élèves pour produire des ostensifs afin d'exprimer ce qu'ils ne peuvent dire faute de mots.

Figure 7

Problème « Les cure-dents », partie de la photo 52 de la classe de P2



L'élève de la figure 7 produit trois codes : un nombre entouré qui dit le numéro de la figure, un nombre écrit au crayon pour exprimer le nombre de cure-dents associé et un nombre écrit au stylo bleu « + 2 » qui explicite la relation de récurrence. Au-delà des codes produits qui rendent compte des différents statuts des nombres en jeu, l'élève opère un détournement du signe égal : de l'effectuation d'un calcul qui est son usage habituel à l'école primaire, le signe égal est ici utilisé pour mettre en relation les données du problème.

Pour le problème « À table! », 5 élèves font référence à la relation de récurrence et 8 à la relation fonctionnelle. La relation fonctionnelle est le plus souvent présente en acte : une série de calculs, toujours identique, témoigne de ce que les élèves ont identifié la relation qui lie le nombre de tables au nombre de personnes pouvant s'asseoir, comme dans la figure 8.

La photo 35 (Figure 8, en bas) témoigne des difficultés à exprimer les différents statuts des nombres en contraste avec l'inventivité de l'élève dans la figure 7. Le premier nombre dit la quantité de tables tandis que le second nombre est le résultat attendu, à savoir la quantité de personnes pouvant

s'asseoir. Ensuite vient une série de calculs qui explicite comment le résultat est obtenu⁶. La reprise à l'identique du procédé témoigne que l'élève a clairement identifié la relation fonctionnelle qui lie les grandeurs. Il faut encore noter que le signe égal a deux statuts distincts dans la même ligne. Expression de la mise en relation entre les nombres de tables et de places assises à la première occurrence (comme dans la figure 5), il reprend ensuite son statut de symbole exprimant l'effectuation d'un calcul. Deux élèves ont clairement formalisé la relation fonctionnelle. Pour l'un « il faut multiplier par 2 et on ajoute 2 », pour l'autre « on fait $\times 2$ et on rajoute 2 ». Ces deux élèves ont un parcours similaire qui les conduit de la relation de récurrence, utilisée dans le problème « Les cure-dents » vers la relation fonctionnelle utilisée dans le problème « À table! ». Regardons dans le détail leur cheminement.

Figure 8

Problème « À table! », partie de la photo 38 (en haut) et de la photo 35 (en bas) classe de P2⁷

$$\begin{array}{l} a) 3+3 = \cancel{6} + 2 = 8 \\ b) 10+10 = \cancel{20} + 2 = 22 \\ c) 25+25 = \cancel{30} + 2 = 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8 = 3 - 3 + 3 = 6 \quad 6 + 2 = 8 \\ 10 = 22 = 10 + 10 = 20 \quad 20 + 2 = 22 \\ 25 = 52 = 25 + 25 = 50 \quad 50 + 2 = 52 \end{array}$$

3.2.1. D'une relation à l'autre, le cas de deux élèves

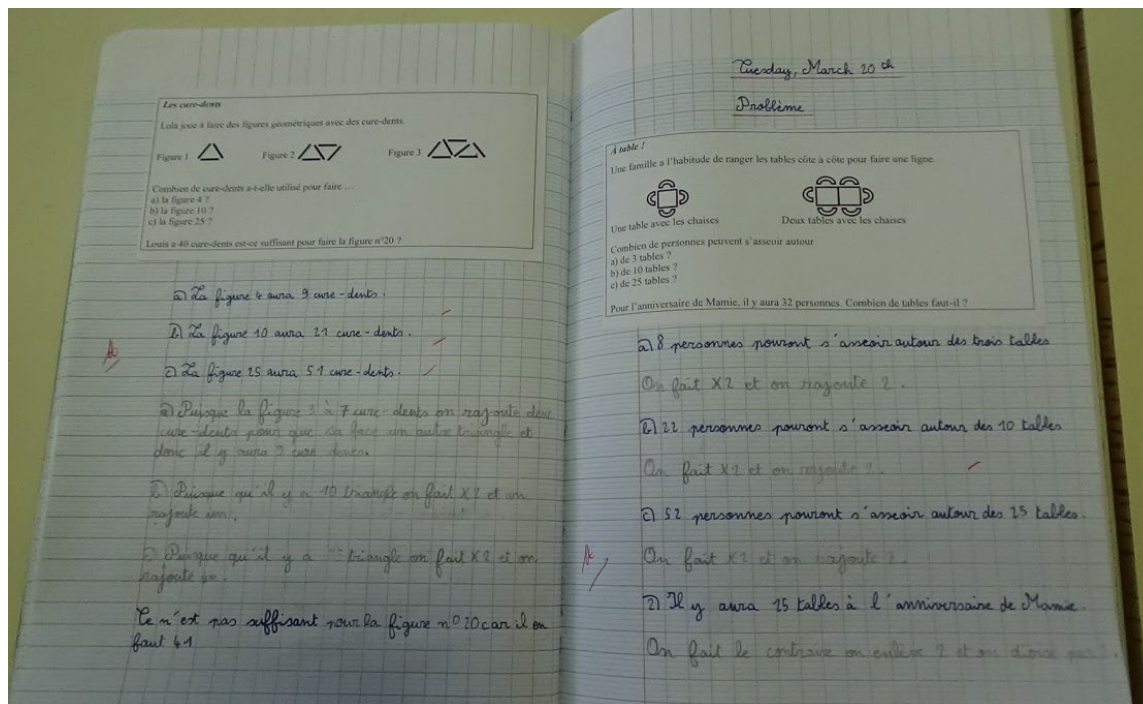
Nous avons déjà rendu compte de l'inventivité du premier élève à travers les codes qu'il a su concevoir pour exprimer en acte le recours à la relation de récurrence dans l'étude du problème « Les cure-dents » (Figure 7, photo 52). Nous avons aussi déjà montré la façon avec laquelle il s'est appuyé sur les dessins pour identifier la relation fonctionnelle (Figure 6 et annexe 2, photo 53). Intéressons-nous à présent au parcours du second élève dont la figure 9 présente la double page de son cahier.

⁶ Si la suite de calculs est syntaxiquement fautive dans la photo 38 ($3 + 3 \neq 6 + 2$), l'élève de la photo 35 ne fait pas cette erreur.

⁷ La photo initiale étant de mauvaise qualité, la production de l'élève a été copiée.

Figure 9

Problèmes « Les cure-dents » et « À table! » photo 30 de la classe P2



Il commence par utiliser la relation de récurrence pour déterminer la quantité de cure-dents de la figure n°4 en explicitant l'élément générateur de cette récurrence. Le passage d'une figure à l'autre repose sur l'ajout d'un triangle formé de deux cure-dents : « puisque la figure 3 a 7 cure-dents, on rajoute deux cure-dents pour que ça fasse un autre triangle et donc il y aura 9 cure-dents ». Pour la figure n°10 (et la figure n° 25), qui constitue un saut par rapport à la figure n°4, l'élève utilise la relation fonctionnelle en disant le calcul à effectuer : « on fait $\times 2$ et on ajoute un » sans donner d'indications sur la façon dont cette relation a été établie. C'est probablement l'application de la relation fonctionnelle qui lui permet de répondre à la dernière question du problème puisqu'il donne comme argument la quantité de cure-dents nécessaires pour réaliser la figure n° 20. Pour le problème « À table! », l'élève explicite d'emblée la relation fonctionnelle en disant, comme pour le problème précédent, le calcul à effectuer « on fait $\times 2$ et on rajoute 2 », là aussi sans donner d'indications sur la façon dont cette relation a été établie. En revanche, il explique clairement comment il adapte cette relation fonctionnelle pour résoudre le problème inverse : « on fait le contraire on enlève 2 et on divise par 2 ». En une double page et deux problèmes cet élève est donc passé d'une relation de récurrence à une relation fonctionnelle et à son application puis d'une relation fonctionnelle à la détermination de la relation fonctionnelle réciproque!

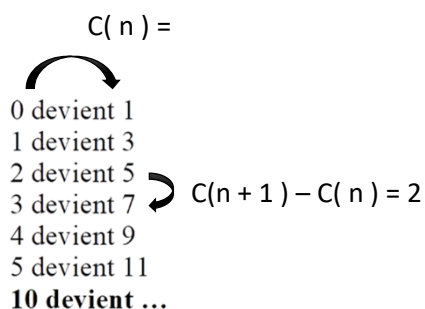
Jusqu'à présent nous avons considéré les deux problèmes à contexte figuratif, considérons à présent le problème « Les machines ».

3.2.2. Des mots pour dire deux types de relations

La présentation tabulaire des actions des « machines » donne une spatialité aux relations de récurrence et fonctionnelle. La relation de récurrence s'identifie en considérant le lien qui existe d'un résultat à un autre en consultant les nombres verticalement de haut en bas, tandis que la relation fonctionnelle s'identifie en considérant le lien qui existe entre l'antécédent et son image en consultant les nombres horizontalement, ce qu'illustre la figure 10 pour la machine C.

Figure 10

La spatialisation des relations de récurrence et fonctionnelle



Pour l'étude de ce problème, les élèves sont d'emblée organisés en groupe et ainsi cinq affiches sont élaborées. Sur un côté de l'affiche sont écrits les calculs qui ont permis de trouver la réponse à la question « 10 devient ... » et sur l'autre côté de l'affiche les élèves écrivent la réponse à la question « que fait la machine ... ». Le tableau 3 fait une synthèse des réponses des groupes où R fait référence à la relation de récurrence et F à la relation fonctionnelle.

Tableau 3

Synthèse des réponses au problème « Les machines » sur les affiches

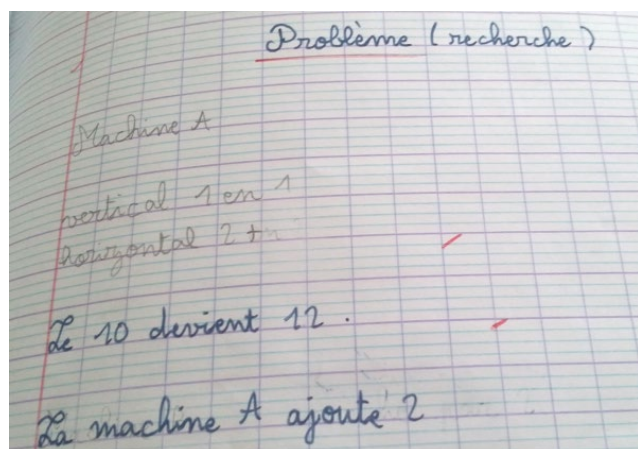
	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3	Groupe 4	Groupe 5
Machine A	F : « + 2 »	R : « 1 en 1 »	F : « ajoute 2 »	F : « + 2 »	R : « 1 en 1 »
Machine B	F : « × 3 »	R : « 3 en 3 »	F : « multiplie par 2 »	F : « × 3 »	R : « 3 en 3 »
Machine C	R : « ajoute 2 au résultat »	R : « 2 en 2 »	F : « ajoute 1 dans l'ordre croissant »	R : « + 2 »	R : « 2 en 2 »

Deux groupes n'ont identifié que les relations de récurrence pour les trois machines. Parmi les trois groupes qui ont clairement identifié la relation fonctionnelle pour les machines A et B, un seul a su trouver une formulation pour dire à sa manière la relation fonctionnelle associée à la machine C, les autres ont mentionné la relation de récurrence. Durant la mise en commun, le professeur a levé la confusion sur les différentes réponses en s'appuyant sur la relation « + 2 » associée aux machines A et C. Ceci confirme mon hypothèse relative au choix des valeurs numériques dans les relations de récurrence et fonctionnelle.

Elles ont été choisies pour permettre aux professeurs de distinguer dénotation et sens : lorsque les élèves annoncent « + 2 » pour les machines A et C, on est en présence de deux expressions qui ont la même dénotation mais des sens différents car liés à des domaines de description différents. Dans un cas c'est l'expression d'une relation fonctionnelle, dans l'autre, l'expression d'une relation de récurrence. Poser des mots, proposer des ostensifs pour dire que les deux expressions ne renvoient pas aux mêmes objets est un premier pas vers les praxéologies algébriques. C'est ce que fait spontanément l'enseignante en utilisant la spatialité des données. Elle parle d'une relation horizontale (c'est la relation fonctionnelle de la machine A) et d'une relation verticale (c'est la relation de récurrence de la machine C). Un élève fera remarquer que le verbe « devient » fait référence à la relation horizontale mais le professeur va accepter l'une ou l'autre réponse. Ce sont ces expressions qui ont été reprises dans les cahiers d'élèves, comme dans la figure 11 où pour la machine A l'élève explicite les deux relations de récurrence et fonctionnelle, en identifiant clairement laquelle correspond à la question.

Figure 11

Problème « Les machines », photo 133247 de la classe de P2



Il semble que ce soit la difficulté à exprimer la relation fonctionnelle de la machine C qui conduise les élèves à considérer la relation de récurrence. Ainsi, plusieurs élèves (comme celui de la figure 12) vont donner la relation fonctionnelle pour les machines A et B et la relation de récurrence pour la machine C. Le fait qu'il précise « sens vertical » peut en effet être interprété comme l'identification par l'élève que ce n'est pas exactement la réponse attendue.

Tandis que les élèves du groupe 3 (Tableau 3) expriment maladroitement que la machine C ajoute le nombre de départ et son suivant : « La machine A ajoute 2. La machine B multiplie par 3. La machine C ajoute 1 dans l'ordre croissant ».

Figure 12

Problème « Les machines », photo 133003 de la classe de P2

Machine A			Machine B			Machine C		
0	devient	2	0		0	0		1
1	devient	3	1		3	1		3
2	devient	4	2		6	2		5
3	devient	5	3		9	3		7
4	devient	6	4		12	4		9
5	devient	7	5		15	5		11
10	devient	12	10		30	10		21

(+2)
(x3)
(+2) ans
vertical

A 10 devient 12.
 B 10 devient 30.
 C 10 devient 21

4. Discussion : des problèmes producteurs de praxéologies algébriques

L'observation des cahiers d'élèves permet d'attester que tous ont identifié des régularités, tous ont développé des praxéologies de généralisation que ce soit à travers une relation de récurrence ou une relation fonctionnelle. Pour Luis Radford (2006) :

Generalizing a pattern algebraically rests on the capability of grasping a commonality noticed on some elements of a sequence S , being aware that this commonality applies to all the terms of S , and being able to use it to provide a direct expression of whatever term of S . (p. 5)

Ainsi la technique « relation de récurrence » relève d'une généralisation arithmétique, tandis que la technique « relation fonctionnelle » relève d'une généralisation algébrique. Demonty *et al.* (2018) précisent la distinction entre généralisation arithmétique et généralisation algébrique :

Arithmetical generalisation is not unrelated to algebraic generalisation : in both forms of reasoning, observation of known terms leads to an understanding, via abduction, of a regular pattern between the terms of the sequence. In the case of arithmetical generalisation, the regular pattern takes the form of a constant increase between two consecutive terms of the sequence. According to Radford (2008), the major difference between arithmetical and algebraic generalization lies in how the pattern is used : in arithmetical generalisation, it is used to determine terms close to the known terms, but cannot be used to deduce more distant terms, unlike algebraic generalisation. When the generalisation is arithmetical, the student therefore does not carry out operations involving indeterminate quantities. It is in this sense that the approach is not algebraic, even though it too involves a process of abduction and deduction. (p. 5)

Les observations montrent que les élèves ont spontanément eu recours à des généralisations arithmétiques et quelques-uns à une généralisation algébrique. Par exemple, la consultation des affiches sur le problème « A table! » montre que 3 groupes sur 5 a fait une généralisation arithmétique et 2 groupes ont fait une généralisation algébrique. Si tous les élèves n'ont pas développé des praxéologies algébriques au sens de Radford, un constat s'impose néanmoins : il y a bien évolution des praxéologies des élèves. D'abord d'un problème de généralisation à contexte figuratif à l'autre. Si dans le premier problème travaillé, les techniques présentes dans les cahiers d'élèves⁸ sont le dessin et la relation de récurrence, dans le second problème la relation fonctionnelle fait son apparition dans 8 cahiers sur 21 alors que la relation de récurrence n'apparaît plus que 5 fois. Les relations fonctionnelles s'expriment le plus souvent sous la forme d'un programme de calculs qui se répète pour répondre aux différentes questions. Incidemment, il est apparu que la mise en relation des ostensifs dessins et calculs était une condition favorable à l'évolution des praxéologies depuis la relation de récurrence vers la relation fonctionnelle. Enfin, il semble bien que l'étude du problème inverse conduise certains élèves à produire une relation fonctionnelle alors même qu'elle n'est pas explicitement demandée.

Le second constat est fait à partir de l'étude du problème de généralisation à contexte numérique : le rôle du professeur dans la production d'ostensifs (langagier ou symbolique) pour accompagner les élèves dans l'identification des deux types de généralisation (arithmétique ou algébrique) est essentiel. On peut penser que la présentation tabulaire qui donne une représentation spatiale aux deux types de techniques est une aide pour les professeurs à l'identification des deux types de relations alors même qu'ils n'ont reçu aucune formation en ce sens. Ce résultat n'est cependant pas en contradiction avec les observations de Carraher *et al.* (2008) pour deux raisons. D'abord parce que les élèves observés ici sont plus âgés d'au moins une année, ce qui est considérable en termes d'expériences et de connaissances mathématiques. En second lieu parce que les élèves ne doivent pas fournir des réponses uniquement pour des valeurs successives, il y a bien des « sauts » entre les valeurs et surtout, concernant les problèmes à contexte figuratif, les élèves ont à traiter le problème inverse.

⁸ Rappelons que les élèves transcrivent librement leur solution en fin de séance, c'est-à-dire après une étude individuelle, en binôme ou en groupe et après la mise en commun.

Ainsi, pour répondre à notre question de recherche, les productions des élèves attestent nettement que la série des trois problèmes de généralisation proposés constitue un milieu favorable au développement de praxéologies généralisatrices. Ils ont engagé les élèves vers des praxéologies qui nourrissent les praxéologies algébriques : généralisation arithmétique et généralisation algébrique contextuelle (Radford, 2006). Tous les élèves ont su identifier les régularités d'un cas à un autre et ont produit des ostensifs qui expriment la généralisation des processus.

Dans la mesure où les professeurs ont spontanément tenu une position de retrait – préconisée dans les problèmes pour chercher – ce sont bien les problèmes eux-mêmes qui ont généré de telles praxéologies. Cette expérimentation valide d'une part l'intérêt de proposer aux élèves une série de trois problèmes dont la mise en réseau est facilitée par le choix des valeurs numériques et d'autre part que l'étude du problème inverse conduit les élèves à une généralisation des processus.

Conclusion et perspectives

En guise de conclusion, considérons les conditions et contraintes pour l'introduction de la problématique de *l'early algebra* à l'école primaire en France. L'examen des programmes d'enseignement comme l'engagement des professeurs dans cette expérimentation attestent qu'une condition écologique est clairement remplie : les problèmes de généralisation comme « problèmes pour chercher » sont une niche écologique possible. L'observation des mises en commun, dont il n'a pas été rendu compte ici, montre que le processus de généralisation n'a pas été un enjeu de sorte que les trois professeurs observés ont accepté toutes les techniques indifféremment. En particulier, il n'y a eu aucune discussion autour de la variété d'expressions du processus de généralisation⁹ qui a un intérêt pour développer l'analyticité.

Si les professeurs observés ont bien identifié que les situations évoquées conduisaient à la recherche de la généralisation d'un processus présenté dans les énoncés sous forme de différents cas particuliers, aucun n'avait envisagé d'utiliser l'algèbre pour résoudre pour lui-même le problème dans le cas général. Ainsi, par exemple, deux des trois professeurs ont éprouvé le besoin que je valide leur réponse concernant la machine C avant que la séance ne commence. Dans les deux cas, ils avaient identifié que la machine C « ajoute le nombre de départ avec le suivant ». Ce qui est une façon possible d'exprimer la relation fonctionnelle $C(n) = 2n + 1$. N'ayant pas identifié l'outil mathématique – qui de toute façon ne relève pas de ce niveau d'enseignement – les professeurs ont ainsi focalisé leur mise en commun sur une étude des problèmes eux-mêmes plutôt que sur la solution, c'est-à-dire qu'ils se sont attachés à faire percevoir aux élèves les indicateurs qui pouvaient permettre d'identifier le processus. Pour ces professeurs, l'enjeu était de s'assurer que les élèves s'engagent dans une démarche d'investigation. Or les problèmes expérimentés sont suffisamment riches pour être investis par les professeurs sur des objets de savoirs de l'école primaire autres que des praxéologies algébriques qui relèvent du collège, par exemple

⁹ Par exemple pour le problème des cure-dents, on peut considérer qu'à chaque triangle est associé 2 cure-dents et on ferme le dernier triangle par un cure-dent d'où $F(n) = 2n + 1$. Mais on peut considérer aussi que le 1^{er} triangle a 3 cure-dents et pour chaque triangle suivant on ajoute 2 cure-dents d'où $F(n) = 3 + 2(n - 1)$.

la reconnaissance de la parité d'un nombre et son interprétation (les résultats étaient pairs dans le problème « A table! » et impairs dans le problèmes « Les cure-dents », la découverte d'une relation par l'observation de relations numériques, le lien entre les notions de double et triple avec l'addition itérée, etc. Ceci rejoint le point de vue de Carraher *et al.* (2000) qui considèrent : « Early algebra is about teaching arithmetic more deeply » (p. 19). Ils ont ainsi étudié comment il était possible de proposer des problèmes dans lesquels les opérations sont approchées comme des fonctions, ils en concluent :

The move for Early Algebra would seem to represent a new way of looking at how arithmetic is taught and learned. As such, it is less about displacing curricula by new topics than in looking at time-honored topics in a new light and with a new set of attitudes. We expect that this will require a lot of investment in teacher development and, as we tried to suggest in the present paper, an important role for classroom research that has both an applied and basic character, where researchers and practitioners work closely together. (p. 21)

Cette première expérimentation me conduirait plutôt à envisager les deux voies comme complémentaires. Il est probable qu'une entrée progressive dans l'algèbre conduise à l'introduction de nouveaux problèmes dans le curriculum et, simultanément, une façon renouvelée d'aborder des problèmes plus classiques.

L'observation l'a confirmé, le rôle du professeur est essentiel pour permettre aux élèves d'identifier les deux types de techniques « relation de récurrence » et « relation fonctionnelle ». Si ces deux techniques mettent en relation deux variables, elles se distinguent par les objets sur lesquels elles portent : les résultats pour la relation de récurrence ou le lien entre la valeur initiale et le résultat associé. Ainsi, dans le cas où le professeur pose des mots pour distinguer ces relations, les élèves se les approprient.

Si une condition écologique d'ordre institutionnel est remplie, une nouvelle condition apparaît nettement relative aux besoins de connaissances mathématiques et didactiques des professeurs pour envisager un accompagnement des élèves dans ce type de problèmes. L'analyse comparée des pratiques des professeurs qui ont expérimenté les trois problèmes dont il est question dans ce chapitre est une première étape et les résultats de l'enquête qui débute seront à comparer avec les résultats de Demonty *et al.* (2018) où contrairement à la France, les problèmes de généralisation sont intégrés au curriculum.

Références

- Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. Dans Bailleul *et al.* (dir.), *Actes de la IXème École d'Été de Didactique des Mathématiques* (p. 101-139). Caen : ARDM & IUFM
- Barquero, B., Florensa, I., Jesse, B., Lucas, C. et Wozniak, F. (2018). The external transposition of inquiry in mathematics education : impact on curriculum in different countries. *ICMI study 24*, University of Tsukuba, Japon.

- Carraher, D. W., Martinez, M. V. et Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 40(1), 3–22.
- Carraher, D., Schliemann, A. et Brizuela, B. (2000). Early algebra, early arithmetic : Treating operations as functions [Présentation]. *PME-NA XXII*, Tucson (AZ). Récupéré de https://www.researchgate.net/publication/253197510_Early_Algebra_Early_Arithmetic_Treating_Operations_as_Functions1
- Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et élément de réponse à partir de la TAD. Dans C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueni-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck et F. Wozniak (dir.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p. 81-108). Grenoble : La pensée sauvage.
- Chevallard, Y. et Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives* (p. 19-39). Grenoble : La pensée sauvage.
- Demonty, I., Vlassis, J. et Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, 9(1), 1-19.
- Kieran, C., Pang, J. S., Schifter, D. et Ng, S. F. (2016). *Early algebra ICME-13 topical surveys*. New York : Springer Open.
- Mary, C., Squalli, H. et Schmidt, S. (2014). Activité de généralisation et de justification chez des élèves en difficulté. Dans C. Mary, H. Squalli, L. DeBlois et L. Theis (dir.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : regard didactique* (p. 163-186). Québec : PUQ.
- Ministère de l'Éducation nationale [MEN] (2015). *Bulletin officiel spécial n° 11 du 26 novembre 2015*. Récupéré de http://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/35/1/BO_SPE_11_26-11-2015_504351.pdf
- Radford, L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. Dans G. Arrigo (dir.), *Atti del Convegno di didattica della matematica, Alta Scuola Pedagogica* (p. 11-27). Locarno, Suisse : Alta Scuola Pedagogica.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns : A semiotic perspective. Dans Alatorre, S., Cortina, J. L., Sáiz, M. et Méndez, A. (dir.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 1-21). Mérida, Mexico : Universidad Pedagógica Nacional.
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26 (2), 257–277.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3* (p. 346-356).

Wozniak, F. (2019). Enseigner les mathématiques au début du XXI^e siècle. *Didactiques en pratique*, 5, 27-37.

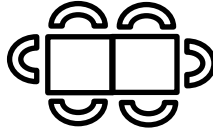
Annexe 1. Les trois problèmes

À table!

Une famille a l'habitude de ranger les tables côte à côte pour faire une ligne.



Une table avec les chaises



Deux tables avec les chaises

Combien de personnes peuvent s'asseoir autour

- a) de 3 tables?
- b) de 10 tables?
- c) de 25 tables?

Pour l'anniversaire de Mamie, il y aura 32 personnes. Combien de tables faut-il?

Les cure-dents

Lola joue à faire des figures géométriques avec des cure-dents.



Figure 1



Figure 2



Figure 3

Combien de cure-dents a-t-elle utilisé pour faire ...

- a) la figure 4?
- b) la figure 10?
- c) la figure 25?

Louis a 40 cure-dents est-ce suffisant pour faire la figure n°20?

Les machines qui transforment les nombres**Machine A**

0 devient 2

1 devient 3

2 devient 4

3 devient 5

4 devient 6

5 devient 7

10 devient ...**Machine B**

0 devient 0

1 devient 3

2 devient 6

3 devient 9

4 devient 12

5 devient 15

10 devient ...**Machine C**

0 devient 1

1 devient 3

2 devient 5

3 devient 7

4 devient 9

5 devient 11

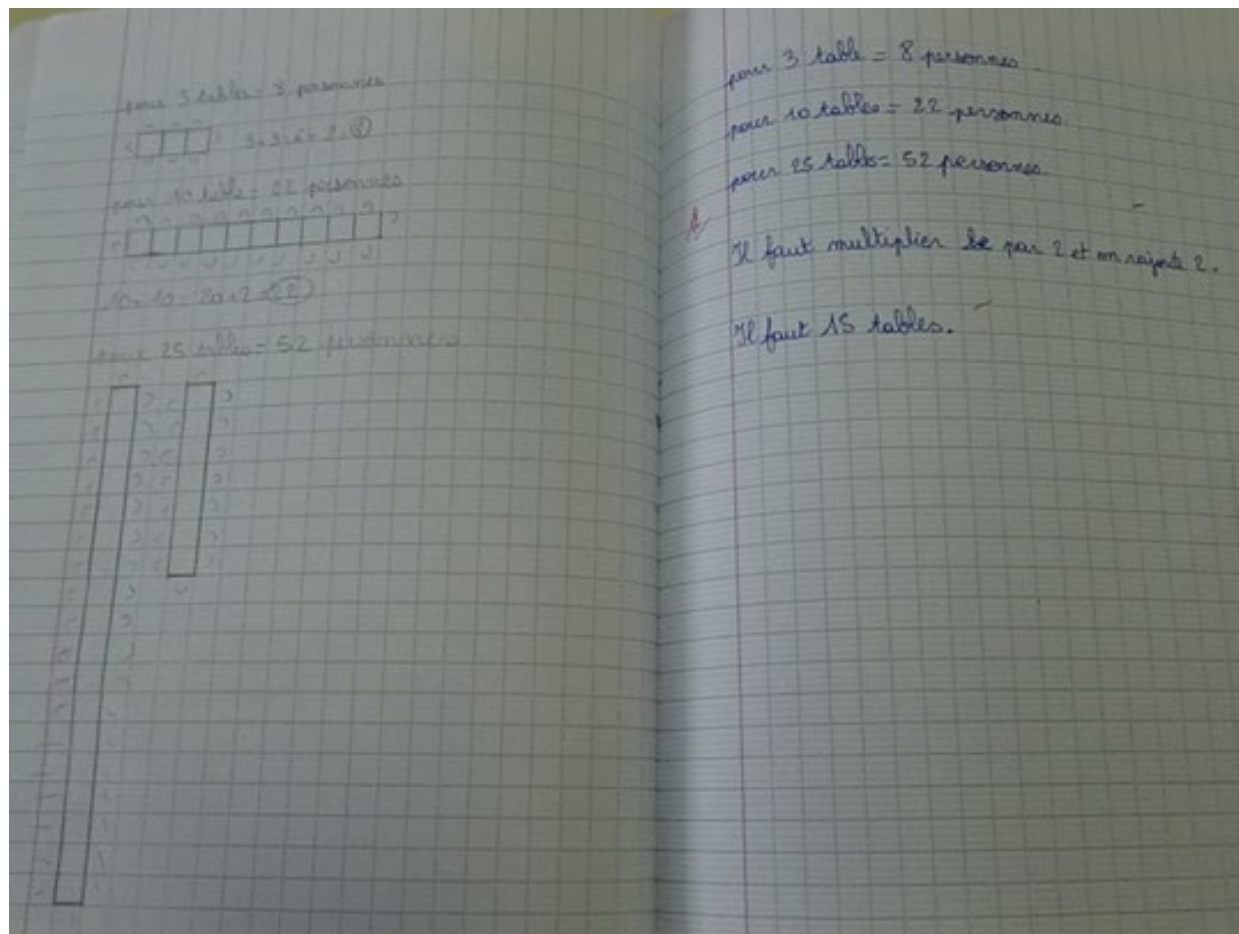
10 devient ...

a) Que fait la machine A?

b) Que fait la machine B?

c) Que fait la machine C?

Annexe 2. Problème « À table! », photo 53 de la classe de P2



Chapitre 3

Quelles potentialités du calcul en ligne dans l'enseignement primaire en France pour favoriser une entrée précoce dans l'algèbre?

Julia Pilet

Université Paris-Est Créteil

julia.pilet@u-pec.fr

Brigitte Grugeon-Allys

Université Paris-Est Créteil

brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr

Résumé

Dans ce chapitre, nous interrogeons la place et le rôle donné au calcul en ligne dans les nouveaux programmes scolaires du primaire de mathématiques de cycle 3, parus en 2015 en France, et dans les manuels. Nous analysons ses potentialités pour favoriser le développement précoce de la pensée algébrique. Pour cela nous commençons par situer le calcul en ligne au sein de l'activité mathématique à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. Nous définissons un modèle épistémologique de référence relatif à l'entrée dans l'algèbre en nous plaçant dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) et définissons ce qu'on entend par activité numérico-algébrique. Nous utilisons ce modèle épistémologique de référence pour analyser l'activité numérico-algébrique qui est attendue dans les programmes et développée dans les manuels scolaires notamment autour du calcul en ligne. Nous mettons ainsi en exergue que les praxéologies sont inégalement développées d'un manuel à l'autre et relativement incomplètes au regard du modèle épistémologique de référence.

Mots-clés

Pensée algébrique, transition arithmétique-algébrique, activité numérico-algébrique, modèle épistémologique de référence, praxéologie

Introduction

Dans cette contribution, nous nous inscrivons dans les recherches en *early algebra* (Kieran, Pang, Schifter et Ng, 2016 ; Radford, 2014) en soutenant que des concepts et des raisonnements développés par les élèves en début de collège en France (11-12 ans) en arithmétique peuvent faciliter la transition de ce domaine vers celui de l'algèbre élémentaire ou au contraire y faire obstacle. Notre intérêt pour ce courant fait suite à nos travaux sur la conception et la diffusion des ressources pour l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre au collège (cycle 4 en France, 12-14 ans) (Grugeon-Allys, Pilet, Chenevotot-Quentin et Delozanne, 2012 ; Pilet, 2015 ; Sirejacob, 2017). Dans le cadre d'un travail participatif avec des enseignants, nous nous sommes collectivement interrogés sur ce qui, dans l'enseignement, pourrait permettre de préparer les élèves à l'entrée dans l'algèbre. Dans ce but, nous abordons les questions suivantes : quels sont les concepts et les raisonnements relevant du domaine arithmétique qui participent à l'entrée dans l'algèbre? Comment organiser et rendre visible aux élèves une continuité de l'enseignement entre les domaines de l'arithmétique traditionnelle¹ et de l'algèbre?

En France le domaine de l'algèbre élémentaire est abordé dans l'enseignement secondaire, au cycle 4² (12-15 ans) et les programmes donnent peu d'éléments sur le développement de la pensée algébrique avant ce cycle. L'apparition récente du « calcul en ligne » dans les programmes français de mathématiques à l'école primaire et au début du collège, parus en 2015 (Ministère de l'Éducation nationale [MEN], 2015), pourrait ouvrir de nouvelles perspectives d'enseignement et d'apprentissage, au regard de l'activité mathématique en jeu lors de cette transition institutionnelle. Quels sont les aspects épistémologiques en jeu dans ce calcul? Quels sont ses liens avec le calcul réfléchi (Butlen et Pézard, 2000, 2007)? En quoi pourrait-il permettre de développer des concepts cruciaux pour l'entrée dans l'algèbre comme ceux d'égalité, d'opérations ou d'expressions numériques, et de préparer les élèves à raisonner algébriquement avec et sur les expressions algébriques, les équations ou les formules? Comment est-il pris en charge dans les nouveaux programmes et les manuels scolaires?

Pour mener cette étude nous nous inscrivons dans la cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) en soutenant que les apprentissages des élèves sont conditionnés par la transposition didactique des savoirs à l'œuvre dans l'institution dans laquelle ils apprennent. Nous faisons l'hypothèse que des difficultés, voire des ruptures dans l'enseignement et l'apprentissage à l'entrée dans l'algèbre peuvent être liées à une activité mathématique peu développée à la frontière entre les domaines arithmétique et algébrique. Nous appelons cette activité « activité numérico-algébrique », et, en présentons dans la partie 1 les principaux aspects épistémologiques. Nous soutenons que l'activité numérico-algébrique relève de praxéologies qui mettent en jeu des concepts communs aux domaines arithmétique et algébrique. Nous la décrivons par une praxéologie de référence (Bosch et Gascón, 2005) que nous articulons à celle que nous avons déjà décrite pour l'activité algébrique relative aux expressions

¹ Nous utilisons par la suite uniquement le terme « arithmétique ».

² En France, l'enseignement primaire et du début du secondaire est découpé en cycles. Le cycle 4 couvre trois des quatre années du collège : classes de cinquième (12-13 ans), de quatrième (13-14 ans) et de troisième (14-15 ans).

algébriques et aux équations (Grugeon, 1997 ; Pilet, 2015 ; Sirejacob, 2017). Enfin, dans la partie 2, nous analysons comment l'activité numérico-algébrique est prise en charge dans les programmes et dans quatre manuels français. Nous nous centrons plus particulièrement sur les praxéologies de calcul.

1. Un modèle praxéologique de référence pour caractériser l'activité numérico-algébrique

Nous commençons par faire une synthèse des travaux portant sur la transition entre l'arithmétique et algèbre. Nous poursuivons par la définition des caractéristiques épistémologiques de l'activité numérico-algébrique pour terminer par la présentation du modèle.

1.1. Que retenir des travaux sur la transition entre l'arithmétique et algèbre?

Dans des travaux plus récents, notamment ceux relevant du courant *early algebra*, Kieran *et al.* (2016) et Radford (2014) considèrent que la transition peut être négociée dès l'école primaire à partir de situation de généralisation. Plusieurs travaux (Carragher et Schliemann, 2007 ; Vergnaud, 1988 ; Kieran *et al.*, 2016) pointent par ailleurs le rôle de la représentation des relations dans la résolution de problèmes. Nous proposons une courte synthèse de ces différents travaux afin de caractériser l'activité numérico-algébrique et les concepts qu'elle met en jeu.

1.1.1. La double rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre

La transition entre l'arithmétique et l'algèbre a fait l'objet de nombreuses recherches, au plan national et international. Dans une approche cognitiviste, les travaux de Vergnaud (1988) caractérisent cette transition par une double rupture entre l'arithmétique et l'algèbre : « D'une part, l'introduction d'un détour formel dans le traitement des problèmes habituellement traités intuitivement, d'autre part, l'introduction d'objets mathématiques nouveaux comme ceux d'équation et d'inconnue, de fonction et de variable » (p. 189).

La première rupture concerne la résolution de problèmes et les raisonnements qu'elle met en jeu dans chaque domaine. Le raisonnement arithmétique consiste à déterminer les données inconnues en partant des éléments connus du contexte alors que le raisonnement algébrique conduit à un travail sur les données connues et inconnues pour modéliser le problème et en faire un traitement formel en vue de le résoudre.

La deuxième rupture porte sur le statut des objets et notamment celui de l'égalité. En arithmétique, l'égalité est utilisée de façon dominante comme annonce de résultat dans le sens où elle sert à effectuer les calculs, souvent de gauche à droite, jusqu'à obtention d'un nombre, donc sans signe opératoire. Cela conduit d'ailleurs certains élèves à produire des écritures incorrectes vis-à-vis de l'égalité pour réaliser une succession de calcul, par exemple $5 + 4 = 9 \times 3 = 18$. Le traitement des expressions algébriques repose sur le statut d'équivalence de l'égalité. Contrairement aux pratiques de calcul en arithmétique, une expression algébrique peut conserver un signe opératoire après réduction. Cette rupture entre pratiques arithmétiques et algébriques a été analysée dans plusieurs recherches comme le *dilemme process-product* (Davis, 1975, cité par Kieran, 1992) ou *l'acceptance of lack of closure* (Collis, 1974, cité par Kieran, 1992). Toutefois, dans certaines tâches, comme celles relevant du calcul réfléchi

(Butlen et Pézard, 2000, 2007), la nécessité de réécrire les nombres et les expressions numériques pour réduire le coût des calculs conduit à une utilisation du signe d'équivalence de l'égalité (par exemple, $25 \times 32 = 25 \times 4 \times 8 = 100 \times 8 = 800$) qui se rapproche de son usage en algèbre. Les réécritures prennent appui sur les propriétés des opérations, des nombres et de la structure du système de numération. Pour Kieran (1992), cette transition dans le statut des objets marque une fausse continuité, dans le sens où certains des objets de l'algèbre, dont les lettres, les signes de l'égalité et des opérations, ne sont pas nouveaux mais sont utilisés avec des significations différentes en algèbre qu'en arithmétique.

1.1.2. Le développement de la pensée algébrique dans les recherches en *early algebra*

Le domaine de recherches *early algebra* est né de l'idée que l'activité algébrique, sans son symbolisme formel, pouvait être accessible à des élèves dès l'école primaire. Ce courant a conduit à définir la « pensée algébrique ». À partir des travaux de Radford (2014), Kieran *et al.* (2016) la caractérisent dans le cadre de la résolution de problèmes par :

(a) *indeterminacy* : unknown numbers are involved in the given problem, (b) *denotation* : the indeterminate numbers are named or symbolized in various ways such as with gestures, words, alphanumeric signs, or some combination of these, and (c) *analyticity* : the indeterminate quantities are treated as if they were known numbers. (p. 11)

Comme l'analyticité consiste à traiter les données connues et inconnues ensemble à partir de propriétés, elle est caractéristique au raisonnement algébrique. L'analyticité n'est pas mise en jeu en arithmétique, en particulier, comme le souligne Radford pour les stratégies d'essais et d'erreurs : « trial-and-error methods fail to satisfy the condition of analyticity » (Radford, 2014, p. 260). Les situations de généralisation de motifs géométriques (*patterns*) jouent un rôle central dans les travaux du courant *early algebra*. Leur utilisation dans des recherches a permis de montrer que de jeunes élèves peuvent mettre en œuvre l'analyticité et ainsi développer une pensée algébrique avant de rencontrer le symbolisme formel introduit au secondaire. Nous retenons l'analyticité comme un ingrédient technologique de l'activité numérico-algébrique développée en particulier dans les praxéologies mettant en jeu des problèmes de type généralisation.

1.1.3. Des modèles symboliques pour représenter des relations dans l'activité numérico-algébrique

Carraher et Schliemann (2007) caractérisent la pensée algébrique précoce en termes de formes basiques de raisonnement qui expriment les relations entre nombres ou quantités. Nous pensons que l'activité numérico-algébrique relève de raisonnements mis en jeu, non seulement dans la résolution de problèmes de généralisation (Radford, 2014), mais aussi dans celle de problèmes conduisant à la recherche de relations entre nombres et quantités.

Les programmes français visent à développer chez les élèves la compétence à « résoudre des problèmes issus de situations de la vie quotidienne ou adaptés de jeux portant sur des grandeurs et leur mesure, des déplacements sur une demi-droite graduée, [...] conduisant à utiliser les quatre opérations » (Eduscol, 2015). Contrairement à ce qui se passe généralement à l'école primaire où la résolution de problèmes vise à rechercher la bonne opération, nous considérons, comme Carraher et Schliemann (2007),

que la représentation de relations entre des données connues et inconnues et leur traitement doivent être pris en considération pour développer une activité numérico-algébrique qui favoriserait l'entrée dans l'algèbre. Selon nous, la résolution de problèmes arithmétiques de structures additives et multiplicatives élémentaires relève d'une telle approche. Ce point de vue était déjà développé par Vergnaud (1988) pour qui certaines activités développées dans la résolution de problème à l'école primaire relèvent de l'algèbre, en fait, d'une activité numérico-algébrique :

Pourtant, certains modes de représentation et d'écriture comme les égalités à trous, utilisées dès les premières classes de l'école élémentaire, ressemblent étrangement à l'algèbre. Et si l'on considère comme étant de nature algébrique, la tâche qui consiste à mettre un problème en représentation, c'est-à-dire à extraire d'un problème ou d'une situation les relations pertinentes, à en fournir un modèle symbolique, puis à traiter les relations ainsi représentées à l'aide d'une syntaxe propre au système symbolique choisi, alors l'algèbre commence, on peut commencer, dès l'école l'élémentaire. (p. 189)

L'idée de représentation est également développée par Kieran *et al.* (2016). Elle montre que l'enseignement de l'algèbre est basé sur la capacité à représenter des relations entre quantités. De plus, exprimer des relations entre quantités repose sur des conversions entre registres de représentation sémiotique (Duval, 1993) qui peuvent être travaillées dès l'école primaire à l'occasion de la résolution de problèmes, notamment dans le cas de problèmes additifs avec mots inducteurs, reposant sur une non-congruence sémantique entre le registre de la langue (énoncé) et le registre des relations arithmétiques (Duval, 1993).

Nous retenons de ces travaux que la représentation et le traitement des relations entre les quantités données ou non d'un problème par un modèle symbolique, relève d'une activité numérico-algébrique. Elles peuvent être formulées par des égalités à trous, des relations exprimées par des signes non conventionnels (gestes, flèches, etc.), c'est-à-dire un système symbolique formel émergeant.

1.1.4. La dialectique numérico-algébrique et les valeurs désignative et monstrative des expressions

S'inscrivant dans une approche anthropologique de l'analyse de l'activité mathématique, Chevallard (1984) analyse les programmes scolaires français au cours du XXe siècle et met en évidence des bouleversements dans l'enseignement autour de la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. Provoqués par la disparition de l'arithmétique traditionnelle à la fin des années soixante, ces bouleversements conduisent à un « affaiblissement de la dialectique fonctionnelle entre le numérique et l'algébrique ». Selon Chevallard, dans cette dialectique entre le numérique et l'algébrique, le langage algébrique permet en particulier l'étude des propriétés des ensembles de nombres (par exemple, étudier la parité du carré d'un nombre entier, prouver que la somme de trois nombres entiers consécutifs est un multiple de 3) et le numérique lui-même est un outil d'étude de l'algébrique (par exemple pour conjecturer ou trouver des contre-exemples). Dans quelle mesure l'activité numérico-algébrique peut-elle préparer à cette dialectique?

Chevallard (1984, p. 75) pointe deux modes de fonctionnement des écritures numériques et algébriques. Elles ont une valeur désignative puisqu'elles désignent des écritures équivalentes d'un même

nombre, comme « $4 + 8$ » et « 12 » ou « $2(x + 3)$ » et « $2x + 6$ ». Les écritures numériques et algébriques ont aussi une valeur monstrative : elles ne donnent pas à voir les mêmes informations ou propriétés. Ainsi « $4 + 8$ » et « $2^2 + 2^3$ » sont deux écritures du nombre 12 qui ne donnent pas les mêmes informations. L'efficacité de la valeur désignative tend à privilégier l'achèvement des calculs et à ignorer leur valeur monstrative, qui sert à des fins de raisonnement :

le langage algébrique - notamment : parce qu'il est une mémoire - vient permettre de conserver de meilleure façon l'information monstrative, et surtout de faire apparaître l'information monstrative pertinente : le passage, en simplification, de l'expression $(2p - 1) + (2p + 1)$ à l'expression $4p$, fait apparaître que $(2p - 1) + (2p + 1)$ désigne un nombre multiple de 4 ; le passage, en complexification, de $4p$ à $(p + 1)^2 - (p - 1)^2$, fait apparaître que $(2p - 1) + (2p + 1)$ est une différence de deux carrés. (Chevallard, 1984, p. 76).

Il en ressort pour notre étude que la valeur monstrative des écritures peut être travaillée sur des expressions numériques dès l'école primaire notamment lors de tâches de calcul réfléchi (Butlen et Pézard, 2000, 2007). En effet, le calcul réfléchi vise un calcul raisonné fondé sur le choix de calculs plus économiques et efficaces *via* une réécriture d'expressions numériques à l'aide de propriétés des nombres et des opérations, comme $11 \times 8 = 10 \times 8 + 8$ (numération décimale, distributivité). Cette réécriture d'expressions numériques conduit, selon les termes de Chevallard, à faire apparaître une « information monstrative pertinente » au regard du but visé. Du point de vue conceptuel, les usages des expressions numériques selon qu'ils reposent sur leur principe d'achèvement des calculs ou sur leur valeur monstrative mettent en jeu le caractère procédural ou structural des expressions numériques. Selon Sfard (1991), les notions mathématiques peuvent être conçues comme des processus (procédural) ou comme des objets (structural), ces deux caractères cohabitent lors de l'activité mathématique.

La distinction apportée par Chevallard entre valeur désignative et monstrative des expressions, nous conduit à considérer la notion de dénotation d'une expression.

1.1.5. La dénotation des expressions

Drouhard (1992) définit la notion de dénotation d'une expression algébrique en référence à la distinction établie par Frege (1971) entre sens (*Sinn*) et dénotation (*Bedeutung*). Par exemple, les expressions numériques $57 + 16$, $57 + 3 + 13$, $60 + 13$ mettent en jeu des signes différents mais réfèrent un même nombre 73, leur dénotation. Les expressions n'ont pas le même sens puisqu'elles ne relèvent pas du même point de vue, ce qui, selon Chevallard (1984), s'exprime par le fait qu'elles n'ont pas la même valeur monstrative. Ceci conduit à élaborer des stratégies efficaces de calcul et la mobilisation de propriétés opératoires. Le calcul réfléchi ou le calcul algébrique repose sur la transformation d'expressions, à dénotation fixe. Leur réécriture s'appuie sur le sens des expressions et les propriétés des opérations et des nombres. Le statut du signe d'égalité est nécessairement une relation d'équivalence.

Le fait de pouvoir raisonner en passant d'une écriture à une autre tout en s'assurant de conserver leur dénotation peut être travaillé dès l'école primaire.

1.2. Une extension de la praxéologie de référence du domaine de l'algèbre élémentaire pour prendre en compte l'activité numérique-algébrique

1.2.1. Quelques notions de la théorie anthropologique du didactique

Nous nous situons dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) dont nous retenons plus particulièrement le concept de praxéologie qui modélise l'activité mathématique. Cette théorie postule que toute activité relève d'un type de tâches, qui peut être accompli par une certaine manière de faire, appelée technique, qui est rendue intelligible et justifiée par une technologie, qui est elle-même justifiée et rendue compréhensible par une théorie. Le bloc technologico-théorique, composé d'une technologie et d'une théorie, est ordinairement identifié comme un savoir, alors que le bloc pratico-technique, composé d'un type de tâches et d'une technique, constitue un savoir-faire.

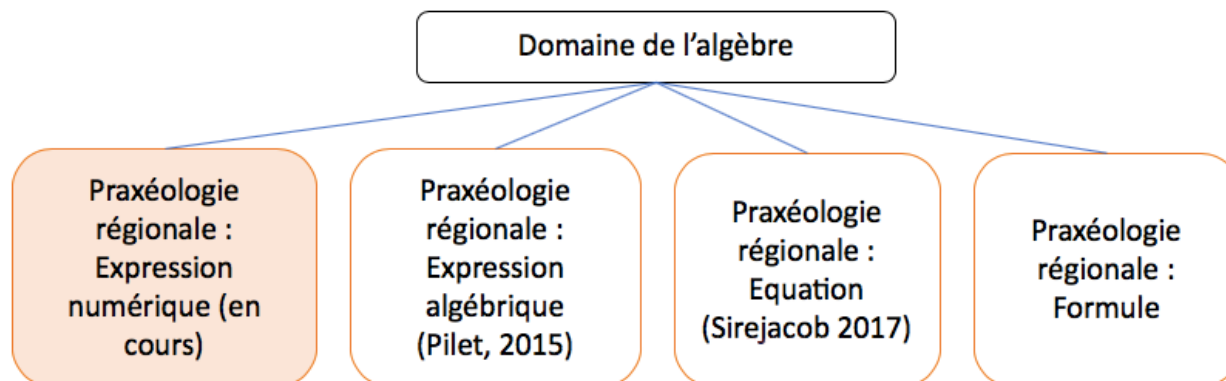
Dans une institution les praxéologies sont rarement isolées les unes des autres, elles s'agrègent selon les éléments technologiques et théoriques qu'elles mettent en jeu : les praxéologies ponctuelles (sujet d'étude) s'agrègent en praxéologies locales (thème d'étude) centrées sur une technologie, puis en praxéologies régionales (secteur d'étude) formées autour d'une théorie, et enfin globales (domaine d'étude) autour de plusieurs théories.

1.2.2. Une praxéologie régionale relative aux expressions numériques pour caractériser l'activité numérique-algébrique

Dans Pilet (2015) et Sirejacob (2017), nous avons défini un modèle praxéologique de référence du domaine de l'algèbre élémentaire décrit en trois praxéologies régionales : une relative aux expressions algébriques, une relative aux équations et une relative aux formules. Cette caractérisation reposait en partie sur le modèle épistémologique de référence (Bosch et Gascón, 2005) de Ruiz-Munzón, Matheron, Bosch et Gascón (2012) dans lequel les objets de l'algèbre sont conçus à partir du processus d'algébrisation des programmes de calcul en plusieurs étapes. Le système initial, constitué des programmes de calcul uniquement du point de vue numérique, évolue vers les expressions algébriques à partir de l'étude de programmes de calculs équivalents qui motive l'utilisation d'une lettre. L'étude de nouveaux problèmes, conduit à faire évoluer ce système vers les équations puis les formules. Nous nous intéressons ici au système initial qui repose sur l'objet expression numérique. Nous proposons d'étendre cette modélisation en la complétant par une quatrième praxéologie régionale relative aux expressions numériques qui se situe donc avant l'introduction du symbolisme algébrique formel (Figure 1).

Figure 1

Extension de la praxéologie de référence du domaine de l'algèbre



Dans le cadre de cette extension, le modèle praxéologique de référence permet de considérer non plus uniquement l'activité algébrique mais aussi l'activité numérico-algébrique.

1.2.3. Trois praxéologies locales pour décrire la praxéologie régionale sur les expressions numériques

Nous fondons le modèle praxéologique de référence sur les aspects épistémologiques qui caractérisent l'activité numérico-algébrique : l'analyticité, la représentation des relations entre les quantités déterminées et indéterminées d'un problème par un modèle symbolique, le calcul s'appuyant sur l'égalité comme relation d'équivalence, la dénotation des expressions numériques, les caractères structural et procédural, les propriétés des nombres et des opérations.

A ces trois aspects épistémologiques correspondent des praxéologies locales, rattachées à des blocs technologico-théoriques de différentes natures. Nous les décrivons par des genres de tâches dans un premier temps. La suite du travail de recherche conduira à définir plus précisément des types de tâches et les variables associés aux objets.

1.2.3.1. Praxéologie locale 1 : Généraliser une régularité (*patterns*, suite)

L'objectif est d'engager les élèves dans le développement d'un raisonnement analytique. Au niveau technologico-théorique, le savoir de référence est celui des fonctions et des suites, le concept de variable (au sens nombre généralisé) y est travaillé. L'analyticité intervient dans la nécessité de mettre en relation les valeurs déterminées et non déterminées et d'opérer sur ses valeurs pour généraliser.

Voici les deux principaux genres de tâches qui génèrent la praxéologie locale 1 :

- G1 : Étant donné une régularité décrite sur ses premiers termes, exprimer le nombre d'éléments à terme quelconque,
- G2 : Exprimer les propriétés arithmétiques du nombre représenté par une expression numérique (parité, multiple, diviseur, etc.). Par exemple : exprimer le fait que la somme de trois nombres consécutifs est un multiple de trois à partir d'un ou de cas particuliers.

1.2.3.2. Praxéologie locale 2 : Représenter par un modèle symbolique les relations entre les quantités déterminées et indéterminées d'un problème se ramenant à la recherche de la valeur d'une inconnue

L'objectif est d'amener les élèves à représenter les relations entre les quantités numériques données et les inconnues par un modèle symbolique comme des égalités à trou prenant en compte des expressions numériques. D'autres représentations peuvent exprimer des relations notamment par des signes non conventionnels (gestes, flèches, etc.). Les problèmes travaillés sont ceux des champs conceptuels additifs et multiplicatifs (Vergnaud, 1990). Au niveau technologico-théorique, sont mis en jeu : le statut du signe d'égalité comme relation d'équivalence, la prise en compte de la dénotation des expressions numériques et leur caractère procédural et structural (Grugeon-Allys et Pilet, 2017), et la prise en compte de la congruence ou non congruence sémantique dans la conversion entre registres de représentation pour obtenir un calcul relationnel attendu.

Voici les trois principaux genres de tâches qui génèrent la praxéologie locale 2 :

- G1 : Résoudre un problème arithmétique de structure additive ou multiplicative,
- G2 : Traduire par une égalité une relation additive ou multiplicative entre les quantités dans un énoncé de problème des champs conceptuels additifs et multiplicatifs et en particulier dans les cas de non-congruence sémantique,
- G3 : Associer des représentations de relations entre différents registres de représentation. Cette association nécessite le traitement des représentations.

1.2.3.3. Praxéologie locale 3 : Calculer sur des expressions numériques

L'objectif est d'amener les élèves à réaliser du calcul en ligne par réécriture des nombres et du calcul. Cette démarche s'appuie sur le statut d'équivalence du signe d'égalité, la dénotation des expressions numériques, le caractère structural des expressions lors de la réécriture, la prise en compte des propriétés des opérations et des nombres, en particulier de la distributivité en acte de la multiplication par rapport à l'addition.

Voici les trois principaux genres de tâches qui génèrent la praxéologie locale 3 :

- G1 : Effectuer un calcul réfléchi (par exemple avec les calculs suivants 11×8 , $57 + 13$, $405 \div 5$),
- G2 : Calculer une expression numérique mettant en jeu les propriétés des opérations ou des usages des parenthèses. Il peut s'agir par exemple de réorganiser les termes d'une somme pour obtenir un calcul moins coûteux : $13 + 6 + 17 + 34 = 13 + 17 + 6 + 34 = (13 + 17) + (6 + 34)$. La différence avec G1 porte sur la réécriture des nombres, qui est à la charge des élèves dans G1.
- G3 : Associer des expressions numériques équivalentes de structures différentes. Par exemple l'association de 36×18 et 24×27 sans calculer le résultat des multiplications fait appel à la valeur monstrative des expressions, par exemple en décomposant $36 \times 18 = 6 \times 6 \times 2 \times 9$ et $24 \times 27 = 6 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9$.

Nous faisons l'hypothèse que permettre une activité numérico-algébrique, fondée sur le modèle épistémologique de référence relatif aux expressions numériques, peut favoriser une continuité entre activité arithmétique et algébrique.

2. Analyse des programmes de mathématiques et de manuels français de cycle 3

Cette analyse vise à repérer quels aspects de l'activité numérico-algébrique sont pris en charge dans les programmes et les manuels français avant l'introduction du symbolisme algébrique. Nous faisons l'hypothèse qu'il y a des potentialités pour la développer mais qu'elles sont insuffisantes. Comme l'introduction au symbolisme algébrique se situe au début du cycle 4 dans les programmes français, nous analysons des manuels de cycle 3³ (9 à 12 ans).

2.1. Méthodologie

Nous menons une analyse en deux temps. Nous commençons par repérer l'habitat relatif à l'activité numérico-algébrique. Nous étudions comment sont pris en compte les concepts communs à l'arithmétique et l'algèbre et en quoi le découpage des programmes et des manuels en domaines et thèmes d'étude peut laisser vivre une activité numérico-algébrique au regard de la référence épistémologique relative aux expressions numériques.

Nous réalisons ensuite une analyse praxéologique, c'est-à-dire que nous repérons comment les praxéologies locales que nous avons définies sont prises en charge, quels sont les types de tâches travaillés et avec quel environnement technologico-théorique? En appui sur la partie précédente, nous nous appuyons sur les critères suivants pour analyser l'activité numérico-algébrique en cycle 3 : l'usage de l'égalité comme relation d'équivalence, la transformation d'expressions numériques à dénotation fixe, la flexibilité entre les caractères structural et procédural d'une expression numérique, l'usage des propriétés des opérations et en particulier de la distributivité de la multiplication sur l'addition, l'usage d'un raisonnement analytique et la représentation des relations entre les quantités numériques données et les inconnues par un modèle symbolique. Nous menons cette étude principalement sur le thème « Calculer des expressions numériques » qui nous intéresse particulièrement parce qu'il permet de traiter la question du calcul en ligne.

Nous précisons dans les paragraphes suivants quels sont les documents analysés pour les programmes et pour les manuels.

2.2. Analyse des programmes de mathématiques de cycle 3 en France

Nous analysons deux types de données : les instructions officielles concernant les mathématiques pour le cycle 3 extraits du bulletin officiel numéro 11 du 26 novembre 2015 (MEN, 2015) qui sont les programmes en vigueur actuellement en France et les documents d'accompagnement aux programmes intitulés « Le calcul aux cycles 2 et 3 » (MEN, 2016a) et « Le calcul en ligne au cycle 3 » (MEN, 2016b). Ces documents visent d'une part à apporter des précisions théoriques et didactiques des notions concernées et d'autre

³ En France, le cycle 3 concerne les élèves de 9 à 12 ans. C'est un cycle qui couvre les deux dernières années de l'enseignement primaire (classes de cours moyen 1 et 2) et la première année du secondaire (classe de sixième).

part à donner des exemples de situations d'enseignement à mettre en œuvre dans les classes. C'est dans ces documents, que nous nous attendons à trouver ce qui concerne le calcul sur les expressions numériques.

Parmi les quatre domaines du programme, c'est dans le domaine « Nombre et calculs » que se trouvent des éléments relatifs à l'activité numérique-algébrique. Le calcul sur les expressions numériques est traité dans l'entrée du programme « Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux » (Figure 2).

Les expressions numériques sont travaillées à travers un type de calcul nouveau appelé calcul en ligne. Dans les documents d'accompagnement, le calcul en ligne est défini comme un calcul qui participe à :

- à la compréhension des différentes écritures d'un même nombre [...], en motivant leur utilisation ;
- à la compréhension progressive des propriétés des opérations en favorisant leur utilisation (il est attendu des élèves qu'ils manipulent ces propriétés en situation et qu'ils les explicitent avec leurs mots ; les dénominations données ci-dessous ne sont pas des objectifs d'apprentissage pour les élèves) [...]
- à la connaissance de propriétés relatives aux opérations, pouvant faciliter le calcul mental ou en ligne en permettant de créer des étapes intermédiaires [...]
- à la compréhension progressive de la signification du signe « = », à concevoir comme équivalence entre le membre écrit à gauche et le membre écrit à droite, et pas seulement pour donner le résultat d'un calcul ;
- à la compréhension progressive de la signification des parenthèses et de leur utilisation pour écrire un calcul complexe. (MEN, 2016b, p. 3)

Il est précisé de plus que :

Dès le début du cycle 3, les activités de calcul en ligne portent sur les quatre opérations avec des nombres entiers, pour effectuer des calculs, travailler les décompositions additives et multiplicatives, les compléments à la centaine la plus proche et résoudre des problèmes variés. (Eduscol, 2016b, p. 5)

Plusieurs des aspects épistémologiques sur les expressions numériques, présentés dans la partie II, sont présents dans ces textes (Tableau 1) : la dénotation des expressions numériques, c'est-à-dire le fait qu'un nombre puisse avoir plusieurs écritures différentes égales, le statut d'équivalence du symbole d'égalité qui peut être travaillé avec des écritures en ligne et le fait que le raisonnement sur la transformation d'une expression en une autre met en jeu des propriétés des opérations, comme la distributivité, qui, même si elles ne sont pas explicitées aux élèves, sont travaillées en acte.

Figure 2

Extrait des BO n°11, 26 novembre 2015

Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux	
<p>Mémoriser des faits numériques et des procédures élémentaires de calcul. Élaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit. Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.</p> <p>» Addition, soustraction, multiplication, division.</p> <p>» Propriétés des opérations :</p> <ul style="list-style-type: none"> • $2+9 = 9+2$ • $3 \times 5 \times 2 = 3 \times 10$ • $5 \times 12 = 5 \times 10 + 5 \times 2$ <p>» Faits et procédures numériques additifs et multiplicatifs.</p> <p>» Multiples et diviseurs des nombres d'usage courant.</p> <p>» Critères de divisibilité (2, 3, 4, 5, 9, 10).</p>	<p>Exemples de faits et procédures numériques :</p> <ul style="list-style-type: none"> » multiplier ou diviser par 10, par 100, par 1000 un nombre décimal, » rechercher le complément à l'unité, à la dizaine, à la centaine supérieure, » encadrer un nombre entre deux multiples consécutifs, » trouver un quotient, un reste, » multiplier par 5, par 25, par 50, par 100, par 0,1, par 0,5... <p>Utiliser différentes présentations pour communiquer les calculs (formulations orales, calcul posé, en ligne, en colonne, etc.).</p> <p>En lien avec la calculatrice, introduire et travailler la priorité de la multiplication sur l'addition et la soustraction ainsi que l'usage des parenthèses.</p>
<p>Calcul mental : calculer mentalement pour obtenir un résultat exact ou évaluer un ordre de grandeur.</p>	
<p>Calcul en ligne : utiliser des parenthèses dans des situations très simples.</p> <p>» Règles d'usage des parenthèses.</p>	
<p>Calcul posé : mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour l'addition, la soustraction, la multiplication, la division.</p> <p>» Techniques opératoires de calcul (dans le cas de la division, on se limite à diviser par un entier).</p>	
<p>Calcul instrumenté : utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat.</p> <p>» Fonctions de base d'une calculatrice.</p>	

Source. MEN (2015, p. 203).

Tableau 1

Analyse synthétique de l'activité numérique-algébrique en cycle 3 dans les documents officiels

Critères d'analyse	Programmes (Eduscol, 2015)	Documents d'accompagnement (Eduscol, 2016a, 2016b)
Statut de l'égalité : statut d'équivalence	Non	Oui
Propriétés des nombres et des opérations, notamment la distributivité	Oui	Oui
Dénotation des expressions numériques (Drouhard, 1992)	Non	Oui
Caractère d'un concept : procédural et/ou structural	Non	Non
Analycité	Non	Non
Représentation des relations entre les quantités numériques données et les inconnues	Non	Non

Le document d'accompagnement souligne que les écritures des calculs en ligne préparent à l'algèbre :

Résumer en un seul calcul, écrit en ligne, les calculs séparés permettant la résolution d'un problème nécessite la maîtrise de l'utilisation des parenthèses ; ceci est une étape importante de l'apprentissage, préparatoire à la production d'écritures algébriques, objectif essentiel du cycle 4. (MEN, 2016b, p. 8)

Comme les priorités opératoires ne sont pas attendues au cycle 3, l'usage des parenthèses est souligné comme étant indispensable même si des écritures en ligne avec des parenthèses seront rendues inutiles plus tard, par exemple avec $5 + (4 \times 3)$. Deux usages des parenthèses sont distingués (MEN, 2016b) :

- des parenthèses qui servent à mettre en lumière des réécritures et qui sont nécessaires, par exemple : $15 \times 6 = (10 + 5) \times 6 = 60 + 30 = 90$;
- des parenthèses qui indiquent l'ordre dans lequel effectuer les calculs, par exemple : $15 \times 6 = (3 \times 5) \times 6 = 3 \times (5 \times 6) = 3 \times 30 = 90$.

Le lien entre la production d'écritures en ligne et la résolution de problèmes est fait pour souligner la nécessaire distinction entre résultat et procédure afin d'amener les élèves à comprendre que sa solution à un problème peut être correcte mais avec une écriture des calculs incorrecte mathématiquement, notamment avec une utilisation du signe d'égalité comme annonce de résultat (Figure 3). La question de

la représentation des relations entre les quantités numériques par un modèle symbolique n'est pas abordée comme telle.

Figure 3

Extrait sur le statut de signe d'égalité

« À la boulangerie j'achète 3 croissants à 1,10 €, 2 baguettes à 80 centimes et une brioche à 4,40 €. Quel est le montant de mes achats ? »

$3 \times 1,10 = 3,30 + 2 \times 0,80 = 3,30 + 1,60 = 4,90 + 4,40 = 9,30$

$3 \times 1,10 + 2 \times 0,80 + 4,40 = 3,30 + 1,60 + 4,40 = (3 + 1 + 4) + (0,30 + 0,60 + 0,40) = 8 + 1,30 = 9,30.$

Dans le premier calcul, le signe « = » ne lie pas des nombres égaux. Cette écriture du calcul est à considérer comme un écrit transitoire. Elle ne doit pas être proposée au tableau, mais ne doit pas non plus être sanctionnée ; la démarche de l'élève est correcte, c'est l'utilisation du symbole de l'égalité qui ne l'est pas.

Source. MEN (2016b, p. 7).

En conclusion, l'analyse des textes officiels montre que la praxéologie mathématique locale 1 sur la généralisation de motifs est absente au cycle 3. Les programmes ne font pas référence explicitement au raisonnement analytique. La praxéologie mathématique locale 2 sur la représentation des relations entre les quantités dans le cadre de la résolution de problèmes arithmétiques verbaux ou dans le cas des grandeurs est présente mais peu explicitée et nous prévoyons d'en faire une analyse plus approfondie pour en dégager les spécificités en prenant en compte d'autres documents officiels sur la résolution de problème. La praxéologie locale 3 sur le calcul avec des expressions numériques est présente et en appui sur les aspects épistémologiques de la référence (Tableau 2).

Tableau 2

Prise en charge de la praxéologie locale 3 « Calculer sur des expressions numériques » par les documents d'accompagnement

Genre de tâches	Présence dans les documents d'accompagnement
Effectuer un calcul réfléchi	De nombreux exemples avec une présentation en calcul en ligne $523 - 67 = ?$, $13 \times 54 = ?$, $193 \times 18 = ?$
Calculer une expression numérique (notamment avec usage des parenthèses)	Usage des parenthèses présenté surtout en lien avec le calcul réfléchi
Associer des expressions numériques de structures différentes	La mise en relation de plusieurs écritures numériques de structures différentes est illustrée à travers des exemples : Écrire 420 de plus façons différentes, sous la forme d'un produit de plusieurs nombres

2.3. Analyse et comparaison de manuels scolaires français de cycle 3

2.3.1. Les manuels analysés

Nous avons analysé quatre manuels de cycle 3 de l'école primaire, des niveaux CM1 et CM2 : Cap Maths CM2 chez Hatier édition 2016, Opération Maths CM1 chez Hatier édition 2016, Nouveaux outils pour les maths chez Magnard édition 2016 et Graine de maths CM2 chez Nathan. En France le nombre de collections de manuels proposé par les éditeurs est très important (Mounier et Priolet, 2015) ainsi cette analyse n'est pas exhaustive.

Nous analysons le manuel de l'élève et le guide du maître. C'est dans ce dernier que nous nous attendons à trouver quels aspects épistémologiques, quels propriétés et raisonnement justifiant leur usage, sont développés autour du calcul sur les expressions numériques. Nous nous restreignons à la praxéologie locale 3 et aux entiers.

2.3.2. Présence du calcul sur les expressions numériques dans les manuels et liens avec le calcul en ligne

Comme nous l'avons montré avec l'analyse précédente, le calcul sur les expressions numériques est développé en lien avec le calcul en ligne dans les programmes. Nous avons analysé dans les chapitres sur le calcul (addition, soustraction et multiplication) si, d'une part, des tâches mettant en jeu des calculs sur des expressions numériques étaient proposées aux élèves et, d'autre part, si parmi les éléments de gestion suggérés dans le guide du maître, le calcul en ligne était mentionné. Nous avons également étudié si le manuel explicitait les choix didactiques globaux réalisés autour du calcul. Ces analyses sont présentées dans le tableau 3.

Ces analyses montrent que la praxéologie de calcul sur les expressions numériques est présente dans les quatre manuels analysés mais que les écritures en ligne le sont inégalement. Seul le manuel Cap Math propose des encadrés spécialement dédiés au calcul sur les expressions numériques. L'analyse praxéologique nous permet d'affiner la prise en charge par ces manuels de la praxéologie « Calculer sur les expressions numériques ».

Tableau 3

Présence calcul sur les expressions numériques dans les manuels

Manuel	Critères	Opération Maths CM1	Cap Maths CM2	Graine de maths CM2	Nouveaux outils pour les maths CM2
Manuel élève	Calcul sur des expressions numériques	Oui, dans les chapitres sur les opérations	Oui dans un encart dédié	Oui, dans les chapitres sur les opérations	Oui, dans les chapitres sur les opérations
	Partie de cours autour du calcul en ligne	Parfois à travers des écritures en « saut » mais non systématique	Oui, des calculs en ligne avec parenthèses	Oui, des calculs en ligne avec parenthèses	Parfois à travers des écritures en « saut » mais non systématique
Guide de l'enseignant	Chapitre justifiant les choix globaux sur le calcul	Oui, différentes manières d'écritures les calculs	Oui, différentes manières d'écritures les calculs	Oui, différentes manières d'écritures les calculs	Peu
	Présence de calcul en ligne dans les indications de mise en œuvre	Oui	Oui	Oui	Peu, surtout des corrections qui donnent le résultat et non les procédures

2.3.3. Analyse praxéologique

Nous commençons par présenter une analyse synthétique (Tableau 4) de la prise en charge des genres de tâches de la praxéologie « Calculer sur les expressions numériques » par les manuels considérés pour illustrer ensuite les analyses sur chaque manuel et enfin conclure sur la comparaison.

Tableau 4

Analyse des manuels selon les types de tâches de la praxéologie « Calculer sur des expressions numériques »

Genre de tâches	Opération Maths CM1	Cap Maths CM2	Graine de maths CM2	Nouveaux outils pour les maths CM2
Effectuer un calcul réfléchi (addition, soustraction)	Décomposition canonique additive présentée par « sauts », non présentée en calcul en ligne Travail sur les compléments	Travail sur les compléments, non présenté en calcul en ligne	Décomposition canonique et additive avec calcul en ligne Travail sur les compléments	Décomposition canonique évoquée, non présentée en calcul en ligne
Effectuer un calcul réfléchi (multiplication)	Décomposition multiplicative avec écriture en ligne	Décomposition multiplicative et canonique d'un facteur (distributivité) traduites par calcul en ligne	Décomposition multiplicative et canonique d'un facteur (distributivité) traduites par calcul en ligne	Décomposition canonique d'un facteur (distributivité) traduite par calcul en ligne
Calculer une expression numérique (dont usage des parenthèses)	Absent Parenthèses utilisées uniquement pour indiquer des groupements sur les décompositions canoniques	Présent Usage et rôle des parenthèses dans les expressions numériques	Présent Usage et rôle des parenthèses dans les expressions numériques	Présent Regroupement de termes pour l'addition Rôle des parenthèses faible : pour développer des usages de la mémoire de la calculatrice
Associer des expressions numériques de structures différentes	Absent	Absent	Absent	Absent

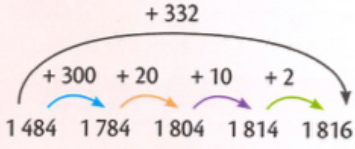
Le manuel *Opérations Maths CM1* (Peltier, Briand, Ngonu et Vergnes, 2016) propose des tâches de calcul réfléchi mais l'utilisation du calcul en ligne n'est pas retenue. C'est un choix qui figure explicitement dans un document complémentaire au guide du maître :

Il est très difficile d'écrire, pour les élèves de cycle 3, comme pour ceux du cycle 2, une suite d'égalités en ne modifiant que certains termes. Par exemple : $1327 + 412 = 1327 + 400 + 10 + 2 = 1727 + 10 + 2 = 1737 + 2 = 1739$. Il est donc plus judicieux de noter les calculs en train de se faire par des schémas qui évitent ce problème. (p. 3)

Pour les calculs additifs, le manuel incite donc à accompagner les calculs par des « sauts » sur la droite numérique qui s'appuient sur une décomposition canonique du nombre (Figure 4) et qui par conséquent n'interrogent pas toujours la réécriture la plus efficace pour réduire les coûts du calcul. Le calcul en ligne est réduit à un calcul « chiffre à chiffre » qui semble correspondre au calcul posé et dont les limites n'en sont pas soulevées dans l'exemple présentés dans le « Mémo » à destination de l'élève. En revanche dans les calculs multiplicatifs, des décompositions multiplicatives écrites en ligne sont suggérées aux élèves dans les exercices. Ce manuel ne développe pas le calcul sur des expressions numériques qui comportent des parenthèses.

Figure 4


Extraits du manuel *Opération Maths CM1* (à gauche « Mémo », p. 42, à droite, exercice, p. 60)

<p>3 Calculer des additions Pour effectuer des additions, on peut :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Calculer mentalement <i>exemple</i> : $2\ 345 + 500 = 2\ 845$ • Faire des sauts sur la droite en décomposant le deuxième terme <i>exemple</i> : $1\ 484 + 332$.  <p>1 484 1 784 1 804 1 814 1 816</p> <ul style="list-style-type: none"> • Calculer en ligne chiffre à chiffre <i>exemple</i> : $4\ 567 + 2\ 312 = 6\ 879$ 	<p>c Calcule 40×60. Voici comment Lucas effectue ce calcul :</p> <p>$40 \times 60 = 4 \times 10 \times 6 \times 10$ $40 \times 60 = 4 \times 6 \times 100$ $40 \times 60 = 2\ 400$</p> <p>As-tu fait comme Lucas ? Calcule comme Lucas 80×900.</p>
---	---

Dans le manuel *Cap Maths CM2* (Charnay, Anselmo, Combiér, Dussuc et Madier, 2017), plusieurs activités proposées régulièrement dans des encadrés, intitulés « Moules à calculs », « Forts en calcul mental » ou « Je révise », mettent en jeu du calcul sur les expressions numériques avec des parenthèses et du calcul réfléchi (Figure 5). Dans le guide du maître, les calculs sont disposés en ligne et en arbre de calcul (Figure 6).

Figure 5

Un exemple de « Moule à calculs », extrait du Manuel Cap Maths CM2, p. 69



PARENTHÈSES, CALCUL MENTAL ET CALCULATRICE

6 Dans le moule à calculs $(\blacksquare \times \blacksquare) - (\blacksquare \times \blacksquare)$ place les 4 nombres 17 58 125 365 pour obtenir :

a. le plus grand résultat possible. c. le résultat le plus proche de 20 000.

b. le plus petit résultat possible.

Figure 6

Un exemple d'indications de mise en œuvre d'un calcul comportant des parenthèses, extrait du Guide du maître du Manuel Cap Maths CM2

– Calculer des expressions comportant des parenthèses.

– Trouver toutes les expressions qui peuvent être obtenues à partir d'un moule à calculs.

• Si nécessaire rappeler que, en présence d'une expression avec parenthèses, il faut d'abord effectuer les calculs « à l'intérieur des parenthèses ». Illustrer éventuellement la suite des calculs par un arbre de calcul, par exemple :

$$\begin{array}{c}
 30 \times (25 - 10) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 30 \quad \times \quad 15 \\
 \searrow \quad \swarrow \\
 450
 \end{array}$$

RÉPONSES : $30 + (25 - 10) = 45$ $30 + (25 \times 10) = 280$
 $30 \times (25 - 10) = 450$ $30 \times (25 + 10) = 1050$

Pour le manuel *Nouveaux outils pour les maths* CM2 (Petit-Jean, Carle et Ginet, 2017), le calcul en ligne est une méthode alternative au calcul posé lorsque ce dernier « n'est pas indispensable » (Figure 7). Pour les calculs réfléchis additifs, il est mené par des « bonds successifs » qui reposent sur la décomposition canonique d'un des deux nombres. Le calcul réfléchi est peu développé dans ce manuel. Dans le manuel élève, quelques exercices portent sur le groupement de termes d'une somme écrite en ligne pour faciliter les calculs. Le guide du maître propose majoritairement des corrections sans éléments sur la mise en œuvre.

Figure 7


Extraits du Guide du maître du manuel Nouveaux outils pour les maths CM2, p. 54

<p>■ Le calcul en ligne</p> <p>Les programmes 2016 insistent particulièrement sur le calcul en ligne. En effet, c'est bien le moyen rapide de trouver un résultat pour de nombreuses situations, lorsque le calcul posé n'est pas indispensable. Il s'appuie essen-</p>	<p>→ 1^{re} méthode : opération posée Vérifier le bon alignement des chiffres, et la gestion des retenues.</p> <p>→ 2^e méthode : calcul en ligne par bonds successifs, à l'aide d'un schéma :</p> $ \begin{array}{ccccccc} & +1 & & +60 & & +6 & \\ 1\ 839 & \xrightarrow{\quad} & 1\ 840 & \xrightarrow{\quad} & 1\ 900 & \xrightarrow{\quad} & 1\ 906 \end{array} $ <p>$1 + 60 + 6 = 67$</p> <p>Questionner les élèves : « Comment vérifier le résultat ? » Par l'addition. $1\ 839 + 67 = 1\ 906$</p>
--	--

De plus ce manuel propose deux pages dédiées à l'usage de parenthèses mais l'enjeu n'est pas d'amener les élèves à utiliser les parenthèses pour se ramener à des calculs plus simples (par exemple pour utiliser la distributivité). Il s'agit principalement d'utiliser la fonction « mémoire » de la calculatrice (Figure 8).

Figure 8

Usage de parenthèses et calculatrice dans le manuel Nouveaux outils pour les maths CM2, p. 50


<ul style="list-style-type: none"> ● Pour faire un calcul avec plusieurs opérations, il est nécessaire de connaître les touches « mémoire » qui permettent de mémoriser les résultats de plusieurs calculs à additionner ou à soustraire. <p>Ex. : pour calculer $(102 \times 9) - (81 \times 4)$, on tape 102×9 [M+] 81×4 [M-] [M=]</p> <p>→ $(102 \times 9) - (81 \times 4) = 918 - 324 = 594$</p>

Enfin le manuel *Graine de maths CM2* (Delaville et al., 2017) accorde de l'importance à la production et au calcul sur les expressions numériques. Il est écrit dans le guide du maître : « En fin de cycle 3, on tend vers un calcul organisé en une seule ligne, utilisant si nécessaire des parenthèses. On prépare ainsi les attendus du cycle 4 liés à la production d'expressions numériques et littérales » (p. 144). Le fait que le calcul sur les expressions numériques soit une activité à développer pour favoriser l'entrée

dans l'algèbre est explicitement mentionné. Plusieurs exercices relatifs au calcul réfléchi et des éléments de cours sont présents dans le manuel de l'élève. Les décompositions des nombres conduisent à des calculs présentés en ligne comme dans l'extrait ci-dessous (Figure 9). Une double page sur l'utilisation des parenthèses contient des exercices de productions d'expressions numériques dans le cadre de la résolution de problèmes (Figure 10). Ces exercices mettent en jeu les aspects procédural et structural des expressions numériques.

Figure 9

Extrait du manuel *Graines de maths CM2*, page 62, sur les décompositions multiplicatives

• Pour multiplier un nombre entier par 20, 500, 11, 9 ou..., on utilise une décomposition de ce nombre et on calcule en ligne.

• $43 \times 20 = (43 \times 2) \times 10$	• $24 \times 11 = (24 \times 10) + (24 \times 1)$
$43 \times 20 = 86 \times 10$	$24 \times 11 = 240 + 24$
$43 \times 20 = 860$	$24 \times 11 = 264$
• $32 \times 500 = (32 \times 5) \times 100$	• $78 \times 9 = (78 \times 10) - (78 \times 1)$
$32 \times 500 = 160 \times 100$	$78 \times 9 = 780 - 78$
$32 \times 500 = 16\,000$	$78 \times 9 = 702$

Figure 10

Extrait du manuel *Graines de maths CM2*, page 67, sur des exercices de production d'expressions numériques parenthésées

<p>6 Problème Violette achète douze cubes en bois à décorer à 2 € pièce et une boîte en bois à 25 € pour les ranger.</p> <p>À l'aide d'un seul calcul sur une ligne, indique le montant total des achats de Violette. Calcule ensuite ce montant.</p>	<p>10 Dans chaque cas, complète les pointillés puis résume en un seul calcul sur une ligne.</p> <p>a. $47 + 22 + \dots + 4 \times \dots$</p> <p>b. $38 + 12 + 24 + 56 + \dots \times \dots$</p>
--	--

En conclusion, tous les manuels proposent des tâches relevant de la praxéologie de calcul et tous évoquent le calcul en ligne mais les potentialités de ce calcul ne sont pas toujours exploitées pour en vue d'arrimer l'arithmétique à l'algèbre. Seuls les manuels Cap Maths CM2 et Graines de Maths CM2 développent les propriétés attendues sur les réécritures ainsi que le raisonnement les justifiant, dans la

praxéologie locale analysée. Les deux autres sont incomplets. Aucun manuel ne propose d'associer des expressions numériques de structures différentes. Enfin des analyses complémentaires sont à mener pour savoir si Graines de Maths est le seul ou non à proposer des productions d'expressions numériques autour de la résolution de problèmes.

Conclusion et perspectives

Nous avons fait l'hypothèse de l'existence d'une activité mathématique à la frontière entre les domaines arithmétique et algébrique, appelée numérico-algébrique, qui, lorsqu'elle est peu développée pourrait expliquer des difficultés dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre. Cette activité, parce qu'elle met en jeu des concepts communs aux domaines arithmétique et algébrique joue un rôle crucial dans l'entrée dans l'algèbre. Nous en avons caractérisé les principaux aspects épistémologiques pour définir les trois principales praxéologies constitutives de la praxéologie globale relative aux expressions numériques : *Généraliser des régularités*, *Représenter par un modèle symbolique les relations entre les quantités déterminées et indéterminées d'un problème se ramenant à la recherche de la valeur d'une inconnue*, *Calculer sur des expressions numériques*. Nous avons restreint notre étude aux nombres entiers, or les nombres décimaux et rationnels, souvent étudiés avant l'entrée dans le symbolisme alphanumérique, conduisent eux-aussi à des décompositions et recompositions d'écritures qui participent à l'activité numérico-algébrique. Considérer les praxéologies relatives au calcul sur ces nombres pourrait enrichir l'étude de l'activité numérico-algébrique.

La praxéologie de référence relative aux expressions numériques nous a permis de dresser une première analyse du modèle institutionnel dominant dans les programmes et les manuels français. Concernant la praxéologie de *Calcul sur des expressions numériques*, nous avons montré que les programmes français de cycle 3 et plus particulièrement les documents d'accompagnement visent en partie la prise en compte de la relation d'équivalence du concept d'égalité, les propriétés des opérations dans le calcul en ligne et la dénotation des expressions numériques. En revanche, ils n'abordent pas l'analyticité. L'analyse de quatre manuels de cycle 3 sur cette même praxéologie met en évidence que trois des manuels prennent en compte très succinctement les aspects épistémologiques caractéristiques de l'activité numérico-algébrique. Cette analyse est à poursuivre pour étendre le choix des manuels à tous les niveaux du cycle 3 et mener l'analyse sur les deux autres praxéologies. Ces résultats partiels dévoilent une tendance à développer insuffisamment l'activité numérico-algébrique pour qu'elle joue son nécessaire rôle pour favoriser le passage à l'algèbre élémentaire. Une autre perspective de recherche concerne le développement de recherches collaboratives entre chercheurs en didactique des mathématiques et enseignants du primaire et du secondaire pour concevoir des ressources visant à faire vivre l'activité numérico-algébrique dans les classes.

Références

- Bosch, M. et Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans Mercier A. et Margolinas C. (dir.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 197-122). Grenoble : La pensée sauvage.
- Butlen, D. et Pézard, M. (2000). Le rôle du calcul mental dans la connaissance des nombres, des opérations et dans la résolution de problèmes. *Repères-IREM*, 41, 5-24.
- Butlen, D. et Pézard, M. (2007). Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. *Grand N*, 79, 3-32.
- Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans F. K. Lester (dir.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (vol. 2, p. 669–705). Charlotte, NC : Information Age Publishing.
- Charnay, R., Anselmo, B., Combiér, G., Dussuc, M.-P. et Madier, D. (2017). *Cap Maths, CM2*. Paris : Hatier.
- Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-265.
- Delaville, X., Frion, H., Giauffret, L., Le Dantec, O., Peindaries, P., Plantiveau, A., Satre, N. et Walkowiak, A. (2017). *Graine de Maths CM2*. Paris : Nathan.
- Drouhard, J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire* [thèse de doctorat]. Université Paris 7 Denis-Diderot, Paris.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, 5, 37-65.
- Frege, G. (1971). *Écrits logiques et philosophiques* (traduit par C. Imbert). Paris : Éditions du Seuil.
- Bosch, M. et Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans A. Mercier et C. Margolinas (dir.), *Balises pour la didactique des mathématiques. Cours de la XII^e école d'été de didactique des mathématiques. Corps (Isère) - Du 20 au 29 août 2003* (p. 107-122). Grenoble : La pensée sauvage.
- Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(2), 167-210.
- Grugeon-Allys B., Pilet J., Chenevotot-Quentin F., Delozanne E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire : Bilan et perspectives* (p. 137-162). Grenoble : La pensée sauvage.

- Grugeon-Allys, B. et Pilet, J. (2017). Quelles connaissances et raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre ? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 106-130.
- Kieran, C., Pang, S., Schifter, D. et Ng, S. (2016). *Early algebra. Research into its nature, its learning, its teaching*. Hamburg : Springer.
- Kieran, C. (1992), The learning of school algebra. Dans D. A. Grouws (dir.), *The Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 390-419). New-York/Toronto : Macmillan.
- Ministère de l'Éducation nationale [MEN] (2015). *Bulletin officiel spécial n° 10 du 19 novembre 2015*. Récupéré de https://www.education.gouv.fr/sites/default/files/imported_files/documents/PDF_BO_SPE_ME_N_10_19-11-2015_500364.pdf
- Ministère de l'Éducation nationale [MEN] (2016a). *Le calcul aux cycles 2 et 3*. Récupéré de http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Nombres_et_calculs/99/2/RA16_C2C3_MATH_math_calc_c2c3_N.D_600992.pdf
- Ministère de l'Éducation nationale [MEN] (2016b). *Le calcul en ligne au cycle 3*. Récupéré de http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Nombres_et_calculs/00/2/RA_16_C3_MATH_calcul_ligne_c3_N.D_601002.pdf
- Mounier, E. et Priolet, M. (2015). *Les manuels scolaires de mathématiques à l'école primaire – De l'analyse descriptive de l'offre éditoriale à son utilisation en classe élémentaire*. Lyon : CNESCO, IFÉ-ENS.
- Peltier, M.-L., Briand, J., Ngono, B. et Vergnes, D. (2016). *Opération Maths, CM1*. Paris : Hatier.
- Petit-Jean, I., Carle, S. et Ginet, S. (2017). *Les nouveaux outils pour les maths, CM2*. Ivry-sur-Seine, France : Magnard.
- Pilet, J. (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches en didactique des mathématiques*, 35(3), 273-312.
- Radford L., (2014) The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Group of Australasia* (26), 257-277.
- Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M. et Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrique-fonctionnelle. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire : Bilan et perspectives* (p. 87-106). Grenoble : La pensée sauvage.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Sirejacob, S. (2017). *Le rôle de l'enseignant dans l'organisation de l'étude personnelle hors la classe de collégiens : le cas des équations du premier degré à une inconnue* [thèse de doctorat]. Université Paris-Diderot, Paris. Récupéré de <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01686587>

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. Dans *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(1.2), 133-170.

Chapitre 4

Le travail sur des calculs arithmétiques comme une voie d'entrée dans l'algèbre

Valeria Borsani

Universidad pedagógica nacional

valeria.borsani@unipe.edu.ar

Carmen Sessa

Universidad pedagógica nacional

carmen.sessa@unipe.edu.ar

Résumé

Dans cet article, nous présentons et analysons un ensemble d'activités qui propose un trajet pour entrer dans l'algèbre à partir de calculs arithmétiques. Les activités sont organisées autour de la question de savoir si une expression numérique est divisible par un nombre donné. Dans un premier temps, nous abordons les activités portant sur des expressions numériques et dans un deuxième temps, nous aborderons celles qui portent sur des expressions algébriques. Ainsi, nous décrivons ce trajet, tout en étudiant les possibilités et potentialités de ce type d'activité qui permet de mettre en jeu des procédés pour entamer un travail propre à « l'expert en algèbre », tout en permettant de réinvestir des pratiques arithmétiques développées par les élèves pendant leur parcours à l'école primaire. Notre étude s'inscrit dans le cadre d'une recherche collaborative menée par un groupe de chercheurs universitaires et d'enseignants d'écoles secondaires. Elle a pour but d'étudier sur le terrain un trajet pour entrer dans l'algèbre à partir de l'arithmétique.

Mots-clés

Entrée dans l'algèbre, divisibilité, calculs arithmétiques

Introduction

Dans le domaine de la didactique de l'algèbre de la fin du XXe siècle, les chercheurs identifient de nombreux phénomènes associés aux premiers apprentissages : les marques de rupture entre l'algèbre et l'arithmétique sont considérées autant en relation avec les objets concernés qu'avec les problèmes à résoudre et les techniques de travail à développer (par exemple, Panizza, Sadovsky et Sessa, 1996, 1999 ; Vergnaud, Cortes et Favre-Artigue, 1988).

Malgré la rupture inévitable que suppose ce qu'on appelle le « passage de l'arithmétique à l'algèbre » (Chevallard, 1984), l'arithmétique scolaire se présente comme étant fertile pour déployer un type de travail propice à l'algèbre. En effet, il existe un consensus entre les chercheurs qui ont étudié la transition entre l'arithmétique et l'algèbre pour soutenir l'idée qu'il y aurait des potentialités à travailler des objets mathématiques à la frontière entre l'arithmétique et l'algèbre, avec l'hypothèse que cela faciliterait l'entrée dans l'algèbre (Grugeon-Allys et Pilet, 2017). Il s'agit de mettre l'accent sur les relations impliquées dans les opérations et les transformations possibles de l'écriture d'un calcul, plutôt que sur les algorithmes permettant d'atteindre les résultats des calculs. Ce travail arithmétique repose sur une vision des nombres et des opérations qui est plus structurale que calculatoire (Squalli, 2015).

Par ailleurs, la rupture à l'entrée dans l'algèbre coïncide, dans l'organisation actuelle du système scolaire, avec le passage de l'école primaire à l'école secondaire. Grimaldi et Itzcovich (2013) décrivent et analysent quelques tensions qui apparaissent lors de ce passage en relation avec les sens de la connaissance, le type de pratique favorisée dans la classe et les objets de l'enseignement. Ces idées et réflexions nous aident à penser des trajectoires d'apprentissages (et donc d'enseignement) pour permettre aux élèves d'établir des liens entre les significations, les représentations et les techniques associées à un concept dans les deux institutions scolaires.

Les programmes scolaires en Argentine ont été modifiés depuis le début du XXIe siècle en tenant compte du développement des recherches dans le domaine. Actuellement, ils prescrivent les premiers apprentissages algébriques au début de l'école secondaire, à travers des processus de généralisation et de symbolisation. Dans un premier temps, les apprenants doivent aborder les idées de variable et d'expression algébrique. Dans un deuxième temps, l'étude des équations est proposée. Voici, par exemple, des objectifs d'apprentissage qui sont proposés dans le programme scolaire pour les écoles secondaires de la ville de Buenos Aires (2015)¹ :

- En première année : « Utiliser les propriétés des nombres naturels et leurs opérations pour lire et produire des formules qui modélisent des situations ; transformer des expressions en d'autres équivalentes afin d'obtenir de nouvelles informations et de produire des arguments rendant compte de la validité de ce qui a été réalisé » (p. 514, traduction libre).

¹ Nueva escuela secundaria de la ciudad de Buenos Aires. Diseño curricular. Formación General. Ciclo básico del bachillerato (2015). www.buenosaires.gob.ar/sites/gcaba/files/dc_nes.pdf

En ce qui concerne le type de tâche, on propose la « production de formules qui permettent de calculer le nombre d'éléments à l'étape n d'un processus témoignant d'une certaine régularité » (p. 515, traduction libre).

- En deuxième année : « Utiliser des ressources algébriques permettant de produire, formuler et valider des conjectures portant sur la divisibilité dans le champ des nombres entiers » (p. 521, traduction libre).

Comme type de tâche, il est proposé : « l'analyse de la structure d'un calcul afin de décider des questions de divisibilité impliquant des nombres naturels. Production, formulation et validation de conjectures portant sur la divisibilité » (p. 522, traduction libre).

L'analyse de l'ensemble des documents et directives nous permet d'identifier la prescription d'un travail avec les expressions algébriques, autant dans la dimension outil que dans la dimension objet (Douady, 1986), ainsi que l'explicitation des traits suivants du travail algébrique :

- La production de l'écriture d'une expression algébrique comme modèle d'une certaine procédure de calcul.
- La reconnaissance d'expressions équivalentes.
- La lecture des informations que portent les expressions algébriques, dans un contexte spécifique.
- La transformation d'une expression en une autre équivalente dans le but de pouvoir lire de nouvelles informations.

Selon Kieran, Pang, Schifter et Ng (2016), dont les travaux s'inscrivent dans le courant *early algebra* il est possible de réaliser des tâches autour de l'équivalence, de la lecture d'information et de la transformation d'une expression, tout en considérant des écritures qui comportent seulement des nombres et des opérations. Cela permettrait de tisser une trame entre les connaissances et les pratiques arithmétiques que les élèves ont élaborées lors de leur passage par l'école primaire et les pratiques algébriques à développer dans les premières années de l'école secondaire.

En contexte argentin, même si ces directives apparaissent dans les programmes depuis plusieurs années, dans la majorité des classes la réalité est différente. En effet, il persiste une forte tradition d'introduction des pratiques algébriques via l'apprentissage des méthodes de résolution d'équations du premier degré à une inconnue. En dépit de cette forte tradition, quelques enseignants (il est difficile d'en évaluer le nombre) ont incorporé des activités exigeant la construction des « formules pour compter » en première année de l'école secondaire. Le travail avec des expressions algébriques dans le cadre de la divisibilité pour la seconde année du secondaire n'est pas suffisamment présent dans les programmes et il est presque absent dans les classes.

Quels aspects du travail algébrique pourraient être abordés dans le contexte de la divisibilité ? Quels types de problèmes permettent une approche de la divisibilité dans le cadre du numérique avec la présence de tâches propres de travail algébrique (la reconnaissance de l'équivalence, la lecture d'information et la transformation d'une expression) ? Comment récupérer ces expériences en travaillant avec des expressions algébriques ?

Dans cet article, afin d'aborder l'étude de ces questions, nous commençons par faire un tour d'horizon des travaux portant sur la didactique de l'algèbre qui fourniront des outils d'analyse. Ensuite, dans la section 2, nous présentons et analysons deux groupes d'activités, tous les deux inclus dans le domaine des contenus des programmes (*curriculum content area* dans la terminologie anglophone) de la divisibilité qui comportent les questions que nous avons formulées dans le paragraphe précédent.

L'étude que nous présentons dans cet article s'inscrit dans le cadre d'une recherche collaborative menée par un groupe de chercheurs universitaires et d'enseignants d'écoles secondaires². La recherche a pour but d'étudier sur le terrain un trajet pour entrer dans l'algèbre à partir de l'arithmétique. La conception et l'analyse des activités, qui sont au cœur de cet article, seront présentées dans la section 2 et constituent l'étape initiale de la recherche³. L'ensemble des activités permet de brosser le portrait d'un type de travail possible pour les classes du début de l'école secondaire.

1. Points d'appuis théoriques

Dans un texte fondateur, Chevallard (1984) a signalé qu'il existe une dialectique au cœur de l'arithmétique remontant à une distinction faite par les Grecs : l'arithmétique vulgaire, logistique, celles des calculateurs, et l'arithmétique « propre au philosophe ». La première, dénommée aussi arithmétique pratique, a pour but fondamental d'effectuer des calculs et est régie par le principe d'achèvement du calcul. La deuxième s'occupe de l'étude de propriétés des nombres et des opérations et est organisée à partir de la conservation de la trace des opérations effectuées (théorie de nombres). Tandis que le calcul numérique utilise le langage numérique pour son pouvoir désignatif, l'arithmétique « algébrique », au contraire, profite de la valeur monstrative des écritures, qui constituera la caractéristique essentielle du langage algébrique. C'est ainsi que, au cœur même du langage numérique, il y a une tension entre deux modes de fonctionnement. Ce fonctionnement algébrique de l'arithmétique, souligné par Chevallard (1984), guide la première partie de la proposition que nous présenterons dans la section 2.1.

Nous considérons que les idées mentionnées ci-dessus se rapprochent de celles que l'on retrouve dans le courant *early algebra*. À l'intérieur de ce courant, les chercheurs ont identifié la possibilité d'un travail pour la classe dans lequel les relations et les propriétés inhérentes aux opérations arithmétiques peuvent être explorées et vues par les élèves comme généralisables, sans qu'ils comprennent nécessairement des symboles alphanumériques. (Kieran *et al.*, 2016).

Le courant *early algebra* est un domaine de recherche avec des propositions d'enseignement dont l'objectif est de rendre accessibles aux jeunes élèves (6 à 12 ans) les traits essentiels de ce que les chercheurs de ce courant désignent sous le nom de « pensée algébrique ». Ainsi, Squalli (2015) définit la pensée algébrique comme une manière de penser que l'on peut mobiliser, sans faire nécessairement

² Notre équipe de recherche de l'*Universidad pedagógica nacional* fait partie depuis son origine de ce groupe collaboratif, à l'intérieur duquel nous développons différentes recherches. Il s'agit d'un groupe ouvert, et pour cela, changeant et hétérogène.

³ Dans un futur proche, la discussion de ces activités à l'intérieur du groupe collaboratif sera le point de départ de la planification collective de propositions d'enseignement qui seront expérimentées dans des classes de certains enseignants du groupe.

usage du symbolisme algébrique littéral, dans des activités mathématiques faisant intervenir un nombre fini d'opérations. Il ajoute :

Sur le plan opératoire, la pensée algébrique se déploie au moyen d'un ensemble de raisonnements particuliers et de manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (par exemple, une tendance à voir l'égalité comme une relation d'équivalence, une tendance à laisser les opérations en suspens ; une tendance à symboliser et à opérer sur des symboles ; une tendance à avoir une vision structurale (voir par exemple une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calcul) (p. 347).

Radford (2014), tout en s'appuyant sur des recherches préalables (Fillooy et Rojano, 1989 ; Filloy, Rojano et Puig, 2007 ; Kieran, 1989), retient trois conditions qu'il propose comme une caractérisation de la pensée algébrique :

- (1) indeterminacy : the problem involves not-known numbers (unknowns, variables, parameters, etc.) ;
- (2) denotation : the indeterminate numbers involved in the problem have to be named or symbolized. [...] One can use alphanumeric signs - but not necessarily. [...] ;
- (3) analyticity : the indeterminate quantities are treated as if they were known numbers (p. 260).

Nous voudrions ajouter à ces trois conditions une quatrième formulée par Arcavi (2005) (4) « An ability to manipulate and to 'read through' symbolic expressions as two complementary aspects in solving algebraic problems » (p. 43). Même s'il est possible que cette quatrième condition soit incluse dans ce que Radford appelle analyticité, il nous semble important de la mentionner explicitement comme une composante de la pensée algébrique. Nous expliquons notre position plus en détail dans le paragraphe suivant.

Sackur, Drouhard, Maurel et P cal (1997) reprennent la distinction établie par Frege (1971) entre sens et dénotation d'une expression algébrique. Ces auteurs soutiennent que modifier le sens tout en conservant la dénotation des expressions et des équations est une des caractéristiques fondamentales du travail dans le langage algébrique et ce qui lui donne de la puissance. Le fait que différentes écritures avec la même dénotation aient des sens différents est appuyé sur une propriété fondamentale du langage algébrique, soit la possibilité d'extraire des informations à partir de l'écriture d'une expression (la valeur monstrative selon Chevallard).

Comme nous l'avons déjà mentionné, Arcavi (2005) souligne que l'habileté de manipuler et aussi de « lire à travers » des expressions symboliques est une composante fondamentale du « sens du symbole ». Dans un texte précédent (Arcavi, 1994), l'auteur fait une caractérisation du sens du symbole à partir de la description et de la discussion de « conduites⁴ » prototypiques qu'il présente comme des

⁴ Dans un article récent, Arcavi, Drijver et Stacy (2017) désignent ces conduites comme « actions ».

exemples « d'avoir un sens du symbole ». Nous nous intéressons à l'une de celles-ci, « Manipulations et au-delà : la lecture à travers des symboles » et, tout particulièrement, à deux aspects spécifiques de la relation entre lire et manipuler que l'auteur souligne :

- lire au lieu de manipuler (ou selon Arcavi « *reading instead of manipulating* ») ;
- manipuler pour lire ou la lecture comme objectif des transformations (ou selon Arcavi « *reading as the goal for manipulations* »).

Nous retenons ces conduites parce qu'elles sont mises en jeu dans les activités que nous analyserons dans la section 2. Nous ajoutons que le choix des transformations à réaliser sur les expressions est fait en fonction de la question à laquelle il faut répondre et dépend du sens des expressions et non de leur dénotation. Nous avons envisagé la distinction entre sens et dénotation des écritures algébriques et l'identification des conduites « lire au lieu de manipuler » et « manipuler pour lire » découpées précédemment pour l'élaboration de l'entrée à l'algèbre que nous proposons. Nous tenons compte de ceci autant pour les expressions numériques que pour les expressions algébriques qui seront considérées.

Les notions de nombres quasi variables, raisonnements quasi variables et expressions quasi variables sont employés par Fujii (2003) en référence à l'étude, en termes de vrai ou de faux, d'un type d'affirmation sur des expressions numériques qui indiquent une relation mathématique sous-jacente qui reste vraie quel que soit le nombre utilisé.

L'auteur soutient que proposer aux étudiants des affirmations sur des expressions numériques généralisables - qui contiennent des nombres quasi variables - les obligerait à se concentrer sur l'expression et la transformation de la structure sous-jacente, mettant en jeu une lecture de l'expression qui n'est pas menée par le calcul. Fujii (2003) affirme que, tout en les utilisant ainsi, les expressions numériques généralisables peuvent aider les élèves à identifier et à discuter des généralisations algébriques beaucoup plus tôt, avant qu'ils apprennent la notation algébrique formelle.

Nous voulons signaler que ce traitement proposé par Fujii (2003) met en jeu la composante (4) de la caractérisation de la pensée algébrique que nous avons donnée.

Même si Fujii (2003) a réalisé ses recherches avec les élèves du primaire et que notre proposition concerne les jeunes qui commencent leur transition vers l'école secondaire, nous considérons la notion de « quasi variable » utile pour caractériser le fonctionnement de certains nombres dans les activités que nous proposons et qui contiennent des expressions numériques.

2. Un trajet pour entrer dans algèbre à partir de l'arithmétique

Le travail que nous proposons pour la classe est organisé en deux parties non nécessairement consécutives (en fait, on pourrait penser à réaliser la première partie dans une année scolaire et l'autre dans la suivante). Dans les deux parties, il s'agit de l'étude d'énoncés dans le cadre de la divisibilité, la première portant sur des expressions numériques et la seconde sur des expressions avec des variables. Des exemples des activités pour chaque partie seront présentés dans les sections suivantes.

2.1. Études d'énoncés sur des expressions numériques

Les exemples des activités que nous présentons ici mobilisent la composante (4) de la pensée algébrique présentée dans la section 1 : la lecture d'information et la transformation d'une expression en une autre équivalente dans le but de répondre à une question. À l'école primaire – dans certains programmes, textes scolaires, classes – on peut trouver des activités qui considèrent les calculs comme objet d'étude. L'exemple suivant (Figure 1) invite à mettre en relation deux calculs différents et à étudier la manière dont le résultat du premier est transformé lorsque les nombres impliqués sont modifiés.

Figure 1

Extrait du manuel Explorar en Matemática 5º

Sachant que $48 \times 15 = 720$, calcule :		
$15 \times 48 =$	$96 \times 15 =$	$720 \div 15 =$
$48 \times 30 =$	$480 \times 150 =$	$720 \div 48 =$
$480 \times 15 =$	$75 \times 48 =$	$7200 \div 15 =$

Source. Broitman, Itzcovich, Escobar, Grimaldi, Ponce et Sancha (2012, p. 25)

Nous remarquons l'importance de récupérer, au moment de l'entrée au secondaire - avec la rupture qu'elle représente - les connaissances, les relations et les idées que les élèves auraient apprises au primaire avec des activités de ce type. Les activités de cette première partie mettent en jeu des écritures de calculs qui combinent plusieurs opérations ; cependant nous ne nous intéresserons pas à l'obtention du résultat de ceux-ci, mais à l'étude de l'expression afin de décider certaines questions relatives à la divisibilité.

Nous présentons maintenant des activités dont l'analyse a priori nous permettra d'expliquer plus en détail les tâches que nous proposons pour les classes de première année du secondaire.

Exemple 1. Décidez, sans effectuer les calculs proposés, si les paires suivantes de calculs donnent le même résultat. Expliquez comment vous y êtes-vous pris.

- 21×15 et $7 \times 3 \times 5$
- 18×15 et $9 \times 5 \times 2 \times 3$
- 33×24 et $11 \times 12 \times 6$
- $15 \times 3 + 1$ et $15 + 15 + 15 + 1$
- $8 \times 235 + 3 \times 235$ et 11×235

Pour décider la validité de l'égalité de deux résultats, c'est-à-dire l'équivalence des deux expressions numériques, il faut avoir recours à la lecture et/ou à la transformation d'une ou des deux expressions. Par exemple : à l'item c., on peut effectuer un « aller-retour » entre les deux expressions pour

reconnaître quelques relations entre les nombres de l'une et de l'autre : on peut penser 33 comme 3×11 (3 fois 11) ; le 11 est dans l'expression à droite, mais 3 ne l'est pas. La tâche est redirigée : il s'agit de relier 3×24 , qui reste dans l'expression à gauche, avec 12×6 qui est dans l'expression à droite. Pour les consignes d. et e., l'interprétation de la multiplication des nombres naturels comme une somme itérée peut être un point d'appui important.

Il s'agit d'un jeu entre ce que l'on « voit » et ce qu'on a besoin de « voir » ; c'est dans ce jeu que les transformations sur les écritures sont nécessaires pour établir l'équivalence des expressions.

Exemple 2. Déterminez, sans effectuer les calculs proposés, si 48×15 est :

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a. un multiple de 15 | d. un multiple de 9 |
| b. un multiple de 6 | e. un multiple de 20 |
| c. un multiple de 7 | f. un multiple de 50 |

Dans ce cas, en plus des actions de lecture et de transformation, il est aussi nécessaire de mettre en jeu des notions de divisibilité. Par exemple, à l'item d. les élèves répondent habituellement que 48×15 n'est pas un multiple de 9 parce que « 9 » n'est pas dans 48, ni dans 15. L'analyse des différents facteurs ainsi que les propriétés du produit permettront d'établir une réponse ; cela peut conduire à un réarrangement de l'expression du calcul proposé, à une transformation de l'écriture afin de rendre visible l'information nécessaire pour répondre, c'est-à-dire que les idées sur la divisibilité que les élèves mettent en jeu au départ seront questionnées et reformulées à partir du fait qu'ils n'ont pas trouvé les informations nécessaires pour répondre, ce qui conduit à l'expression du calcul.

Il est important de noter que la transformation d'une expression implique la prise de différentes décisions : quel « objet » transformer, pour quelle raison faut-il le transformer et quelle sorte de transformation est nécessaire ?

Exemple 3. Sans trouver le résultat des calculs suivants, décidez si les affirmations sont vraies ou fausses.

Expliquez comment vous vous y êtes pris.

- $2 \times 15\,673 + 4$ donne un nombre pair.
- $3 \times 15\,673 + 6$ donne un nombre pair.
- $374 \times 15 + 21$ est un multiple de 3.
- $7 \times 174 + 13$ est un multiple de 7.
- $2 \times 174 + 5 \times 174 + 2$ est un multiple de 7.

Au contraire de l'exemple précédent, les expressions sont composées de produits et de sommes ; ce changement mobilise de nouvelles propriétés de divisibilité qui serviront de support pour étudier les expressions. En particulier, les propriétés : « si A est un multiple de B, alors A + C est un multiple de B si et

seulement si C l'est aussi » et « si A est un multiple de B, $A \times N$ est multiple de B quel que soit la valeur du nombre N » sont en jeu ici. Ainsi, même dans ces exemples de grands nombres sont utilisés, il n'est pas nécessaire de les considérer dans le raisonnement, à cette exception près qu'à la question b. il est nécessaire reconnaître que 15 673 est un nombre impair. De cette manière, les nombres qui apparaissent ici – 15 673, 374, 174 – peuvent être considérés comme n'importe quel nombre, ils ont le statut de quasi variable dans le sens de Fujii (2003).

La transformation qu'il faut faire dans la question e. – deux fois 174 plus 5 fois 174 est égal à 7 fois 174 – est basée sur la notion de multiplication en tant que somme itérée. Nous verrons que ce type de transformation sera repris lors du travail sur des expressions algébriques, parfois sous sa forme de « propriété de distributivité » ou sous sa forme de « facteur commun ».

Si nous considérons les connaissances liées à la divisibilité ainsi que le travail « algébrique » qui se développe dans les trois exemples précédents, nous pourrions dire que l'un alimente l'autre et qu'ils se renforcent mutuellement.

Dans cette section nous avons présenté trois activités centrées sur l'étude d'expressions numériques : la lecture d'informations à partir d'une écriture, la notion de calculs équivalents et la possibilité de transformer une écriture en une autre équivalente pour lire de nouvelles informations sont différents aspects du travail algébrique lesquels, jusqu'ici, sont faits sur des expressions qui ne contiennent pas de lettres. Dans notre proposition, nous avons l'intention de récupérer le travail effectué dans cette première partie pour avancer plus tard, mais pas nécessairement tout de suite, vers un travail sur des expressions algébriques. Les exemples de la section 2.2 poursuivent cet objectif.

2.2. Étude d'énoncés qui comportent des expressions avec des variables

Dans la proposition que nous développons, nous proposerons, d'une part, un travail sur les expressions algébriques dans lequel les lettres devraient être remplacées par des valeurs différentes afin d'obtenir les conditions de divisibilité requises par chaque problème. D'autre part, nous avons l'intention de proposer une étude du « domaine de la véracité » d'une déclaration contenant des expressions avec des variables, au sens de Sackur *et al.* (1997).

Exemple 4. Sans faire les calculs, étudiez quel nombre il est possible d'additionner ou de multiplier dans chaque cas afin que l'affirmation soit vraie. Pouvez-vous trouver plus d'un nombre ? Expliquez vos réponses.

- a. $17 \times 53 + \dots$ est un nombre pair.
- b. $6 \times \dots$ est un nombre impair.
- c. $5 \times \dots + 11$ est un nombre impair.
- d. $\dots \times 4 + 22$ est un nombre pair.

Les élèves doivent explorer différentes valeurs afin de compléter l'expression pour qu'une certaine condition soit remplie. Même si les lettres ne sont pas encore proposées en tant que moyen pour exprimer

une généralité, cette possibilité d'exploration avec des nombres différents favorise un rapport avec la notion de variable.

Nous pensons que des réponses différentes peuvent émerger dans une classe : certaines s'appuient sur les propriétés de divisibilité et d'autres sur l'analyse du dernier chiffre (ce dernier survient généralement lorsque les élèves analysent la divisibilité par 2 ou par 5). La variété de réponses des apprenants dans l'espace collectif, génère de bonnes conditions pour projeter *une nouvelle tâche* : la caractérisation de l'ensemble des nombres avec lesquels on peut compléter chaque expression pour qu'elle réponde à la consigne.

Les formulations de différentes conjectures pourraient apparaître telles que « on peut ajouter *n'importe quel nombre* finissant par 1 », « *quelques nombres* servent et d'autres ne servent pas » ou « *aucun nombre* ne répond à la consigne ». Ces formulations ne sont pas uniquement constituées de nombres, mais elles ont aussi besoin de quantificateurs pour caractériser l'ensemble des nombres qui sont solution.

L'analyse et la discussion sur la caractérisation de l'ensemble des valeurs qui rendent une affirmation vraie amènent à considérer l'exhaustivité des réponses comme un sujet important à travailler : il s'agit de valider qu'un ensemble de nombres – un sous-ensemble de nombres naturels dans ce cas – sert comme réponse au problème et aussi que son complément, l'ensemble des nombres restant ne sert pas. Nous ne pensons pas à mettre en jeu l'écriture symbolique des ensembles infinis qui pourraient apparaître. Le travail avec ce type d'activités offre de bonnes conditions pour l'apparition de la lettre représentant une variable, comme nous le verrons dans les exemples suivants.

Exemple 5.

- a. Est-il vrai que si dans $16 \times 15 + a$ la lettre a est remplacée par le nombre 44, le résultat est un multiple de 4 ? Et si elle est remplacée par 154 ?
- b. Avec quels autres nombres peut-on remplacer la lettre a pour que le résultat de $16 \times 15 + a$ soit un multiple de 4 ?
- c. Quelles sont toutes les valeurs par lesquelles peut-on remplacer la variable a pour qu'un multiple de 4 soit obtenu ?

Nous pensons que cela pourrait être l'une des premières fois que les élèves trouvent la lettre comme partie d'une expression. La lettre peut être remplacée par des valeurs différentes pour obtenir des expressions numériques avec des propriétés différentes (certaines sont multiples de 4, d'autres non). Les apprenants doivent choisir par quelle valeur la remplacer pour répondre aux consignes b. et c. Il y a un objectif, un but pour ce remplacement.

Dans la consigne c., d'une manière similaire à l'activité de l'exemple 4, il s'agit de dépasser l'exploration numérique pour formuler – et puis valider – une propriété générale : Si la lettre a est remplacée par n'importe quel multiple de 4, il est vrai que $16 \times 15 + a$ est un multiple de 4 ; dans tous les autres cas, la proposition est fautive.

Nous souhaitons souligner que l'introduction de la lettre est un peu imposée et que, dans la consigne 1. - par le type de tâche à réaliser - elle n'exprime aucune généralité, elle doit être remplacée par deux valeurs déterminées dans la consigne. Ce symbole littéral sera chargé avec la signification de variable au fur et à mesure que les problèmes suivants sont abordés.

L'activité suivante propose aussi la recherche de valeurs de la variable pour satisfaire ou non une certaine condition et, a posteriori, l'étude du « domaine de véracité » d'un énoncé.

Exemple 6.

- a. Si c'est possible, trouvez trois valeurs de la variable c pour lesquelles $2 \cdot c + 4$ soit impaire, et trois valeurs pour qu'il ne le soit pas.
- b. Si c'est possible, trouvez trois valeurs de la variable c pour lesquelles $2 \cdot c + 4$ est multiple de 6, et trois valeurs pour qu'il ne le soit pas.
- c. Si c'est possible, trouvez trois valeurs de la variable c pour lesquelles $2 \cdot c + 4$ est multiple de 5, et trois valeurs pour qu'il ne le soit pas.
- d. Si c'est possible, trouvez trois valeurs de la variable c pour lesquelles $2 \cdot c + 4$ est par, et trois valeurs pour qu'il ne le soit pas.

Comme dans l'exemple 4, la diversité des réponses qui peuvent surgir dans l'espace collectif de la classe génère de bonnes conditions pour installer la discussion autour de l'ensemble des valeurs de la variable qui font que l'expression évaluée vérifie la condition demandée. Dans les consignes b. et c., par exemple, les élèves peuvent donner un ensemble infini comme réponse (les nombres qui sont multiples de 6 pour la consigne b. ou des nombres se terminant par 2 pour la tâche c.), sans considérer toutes les possibilités. Dans un tel cas, le rôle de l'enseignant serait de poser la question de l'exhaustivité. Nous avons délibérément inclus la même expression algébrique dans les quatre tâches de l'exemple 6 pour indiquer clairement que le traitement pertinent de l'expression dépend de la nature de la tâche.

Pour un type d'activité, comme la précédente, nous imaginons des élèves qui l'abordent de façons différentes : certains d'une manière plus exploratoire, en évaluant l'expression dans différents nombres et en construisant une hypothèse de généralité à partir des exemples ; d'autres avec une analyse plus pointue sur la forme de l'expression qui leur permet d'anticiper les effets d'évaluations possibles.

L'exemple suivant présente une activité similaire qui nécessite la transformation des expressions.

Exemple 7. Dans chaque cas, étudiez pour quelles valeurs de la variable n :

- a. $8n + 2n$ est un nombre dont le chiffre des unités est 0
- b. $3n + 2n$ est un multiple de 5
- c. $3n + 2n + 1$ est un nombre pair
- d. $3n + 3 + n$ est un multiple de 4
- e. $1219n + 1$ est un multiple de 6
- f. $5(n + 3) + n$ est un multiple de 5
- g. $5(n + 3) + n$ est un multiple de 3

Les tâches a., b. et d. invitent à un travail sur l'écriture pour trouver une nouvelle expression qui permette de lire la réponse sans besoin de passer par des évaluations. La lettre pourrait être considérée comme la marque de « n'importe quel nombre ». Les tâches c. et d. nécessitent un travail postérieur à la transformation pour pouvoir déterminer quelles valeurs de la variable n répondent à la condition demandée.

Avec les tâches f. et g., nous introduisons, pour l'élève, l'idée que la transformation et la lecture à effectuer sur une expression seront orientées par la condition de divisibilité qui est cherchée.

Les exemples que nous avons présentés mettent en jeu une problématique très nouvelle pour les apprenants, problématique que nous nous proposons de discuter avec eux à partir de la résolution de ce type d'activités :

Un énoncé dans lequel seuls les nombres interviennent peut-être vrai ou faux. Par exemple, l'énoncé « $2 \times 6 + 4$ est un multiple de 4 » est vrai, tandis que l'énoncé « $2 \times 6 + 4$ est un multiple de 5 » est faux. Maintenant, comme nous l'avons vu dans les exemples précédents, si on veut étudier le « domaine de véracité » d'un énoncé dans lequel interviennent des expressions avec des variables, trois situations mutuellement exclusives peuvent se présenter :

- Qui soit vrai pour toute valeur de la variable,
- Qui soit vrai pour quelques valeurs de la variable et pour d'autres pas, et
- Qu'aucune valeur de la variable ne serve à obtenir un énoncé vrai (c'est-à-dire, il est faux pour tous les nombres).

Cette problématique constitue une rupture importante par rapport au travail arithmétique auquel les élèves sont habitués et il permettrait une première rencontre avec l'équation considérée comme un énoncé dans lequel interviennent des expressions avec des variables.

Par exemple, les élèves pourraient entamer une activité comme la suivante, grâce aux outils qu'ils ont développés pour étudier les questions de divisibilité.

Exemple 8. Dans chaque cas, étudiez pour quelles valeurs de la variable chaque affirmation est vraie :

a. $3t + 5t$ est égal à $8t$

b. $3 + 5t = 6t$

c. $10m + 3 = 8m + 2m$

d. $10m + 3 = 8m + 3m$

Nous comprenons cette approche aux équations comme des objets (au sens de Douady, 1986) liés à la possibilité de les penser comme un énoncé qui établit l'égalité de deux expressions algébriques avec une variable ; le domaine de véracité de cette affirmation correspond à l'ensemble des solutions de l'équation. De ce point de vue, les équations avec une variable qui ont une seule solution, celles sans solution et celles avec une infinité de solutions, peuvent être considérées comme ayant le même statut.

En résumé, les exemples de cette deuxième partie configurent un premier contact avec l'algèbre à travers l'objet « expression algébrique » et exploitent de manière centrale l'idée d'équivalence, de lecture et de transformation d'expressions et la notion de variable.

Réflexions finales

Rapportons brièvement la manière habituelle de travailler à l'école secondaire afin d'introduire le langage algébrique symbolique : d'un côté, les élèves sont confrontés à la résolution d'équations, dont la lettre apparaît comme un nombre caché, à découvrir ; de l'autre, des exercices de manipulation d'expressions algébriques sans aucune finalité spécifique sont proposés. Les deux manières de faire se déroulent sous le contrôle de « règles de transformation » que l'élève doit se rappeler. De notre point de vue, ce type de travail avec les expressions algébriques n'est pas assez puissant pour qu'un débutant construise ces objets avec du sens.

Dans le type d'activités qui nous avons présenté dans cet article, le travail à faire sur des expressions algébriques n'est pas une fin en soi, mais il sert à répondre à des questions. Afin de réaliser les tâches, les élèves doivent évaluer les expressions, lire des informations sur celles-ci et les transformer convenablement selon le but de la tâche.

Dans le contexte de la divisibilité, l'analyse des activités que nous avons présentées nous permet d'affirmer que le type d'énoncé « une telle expression numérique est un multiple d'un tel nombre » est puissant pour soutenir des travaux de nature différent :

- étudier cela pour des expressions et des nombres particuliers, avec l'exigence de lire l'information ou d'effectuer une transformation pour la lire, sans obtenir le résultat par des calculs ;
- considérer certains nombres dans les expressions comme des « quasi variables » ;
- décider si une expression algébrique évaluée à une valeur donnée de la variable est divisible par un nombre ;
- chercher les valeurs de la variable qui font que l'expression évaluée vérifie la condition ;

- étudier le « domaine de véracité » d'un énoncé portant sur une expression algébrique.

Si l'on observe tous les exemples ensemble, les élèves doivent décider quel objet observer à l'intérieur de l'expression, pourquoi la transformer et comment le faire. Les transformations à réaliser sur une expression sont guidées par la question à laquelle il faut répondre.

Par ailleurs, nous pensons que la question sur la divisibilité d'un nombre par un autre est pertinente pour que les jeunes qui commencent l'école secondaire puissent reprendre les problèmes sur lesquels ils ont travaillé à l'école primaire.

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, la prochaine étape de notre recherche collaborative vise à développer une planification d'enseignement concrète qui sera expérimentée dans la classe de certains professeurs du groupe. Les moments de planification collective, ainsi que les discussions qui auront lieu, à partir de la mise en place dans les classes de certains enseignants du groupe, nous permettront de reformuler, d'épaissir et d'enrichir les réflexions et analyses que nous avons proposées ici.

Les professeurs du groupe collaboratif ont tous un regard critique au sujet des pratiques habituelles concernant l'algèbre et chacun d'eux tente d'offrir à ses élèves des expériences plus significatives. Certains de ceux qui enseignent aux premières années de l'école secondaire travaillent en classe avec des activités de « formules pour compter » comme une manière d'introduire les élèves au travail algébrique. La relation entre ce travail et celui que nous proposons fera partie certainement de nos discussions. Bien que le nouveau travail se réalise avant ou après les activités de comptage, il faudra discuter quelles nouveautés – concernant le travail algébrique – apportent un type de travail au sujet de l'autre. En particulier, comment récupérer dans l'un l'idée de variable construite dans l'autre.

Références

- Arcavi, A. (1994). Symbol sense : Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.
- Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25(2), 42-47.
- Arcavi, A., Drijvers, P. et Stacey, K. (2017). *The Learning and Teaching of Algebra : Ideas, Insights and Activities*. Londres : Routledge.
- Broitman, C., Itzcovich, H., Escobar, M. Grimaldi, V., Ponce, H. et Sancha, I. (2012). *Explorar en Matemática* 5. Madrid : Santillana.
- Chevallard Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie : l'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2).

- Filloy, E. et Rojano, T. (1989). Solving equations : The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.
- Filloy, E., Rojano, T. et Puig, L. (2007). *Educational algebra : A theoretical and empirical approach*. New York : Springer.
- Frege, G. (1971). *Écrits logiques et philosophiques* (traduit par C. Imbert). Paris : Éditions du Seuil.
- Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems : Is the concept of variable so difficult for students to understand? Dans N. A. Pateman, B. J. Dougherty, et J. T. Zilliox (dir.), *Proceedings of the 2003 joint meeting of the PME and PMENA* (vol. 1, p. 49-65). Honolulu, HI.
- Grimaldi, V. et Itzcovich, H. (2013). Tensiones en el paso de la escuela primaria a la escuela media. Algunas reflexiones en el área de matemática. Dans C. Broitman (dir.), *Matemáticas en la escuela primaria II. Saberes y conocimientos de niños y docentes*. Buenos Aires, Editorial Paidós.
- Grugeon-Allys, B. et Pilet, J. (2017). Quelles connaissances et raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre?. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 106-130.
- Kieran, C. (1989). A perspective on algebraic thinking. Dans G. Vergnaud, J. Rogalski et M. Artigue (dir.). *Proceedings of the 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, p. 163-171). Paris : ERIC.
- Kieran, C., Pang, S., Schifter, D. et Ng, S. (2016). *Early algebra. Research into its nature, its learning, its teaching*. Hamburg : Springer.
- Panizza, M., Sadovsky, P. et Sessa, C. (1996). The first algebraic learning - The failure of success. Research report. *Proceedings of 20th International Conference of the 20th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, p. 107-114). Valence, Espagne, Univ.
- Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables : entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 453-461.
- Radford L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277.
- Sackur, C., Drouhard, J.P., Maurel, M. et Pécal, M. (1997). Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire. *Repères IREM*, 28, 37-68.
- Squalli H. (2015) La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3* (p. 346-356).
- Vergnaud, G., Cortes, A. et Favre-Artigue, P. (1988). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. Dans G. Vergnaud, G. Brousseau et M. Hulin (dir.),

Didactique et acquisition des concepts scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres (p. 259-279).
Grenoble : La pensée sauvage.

Chapitre 5

Étude de raisonnements mathématiques associés à la pensée algébrique chez les élèves avant l'introduction de l'algèbre

Doris Jeannotte

Université du Québec à Montréal

doris.jeannotte@uqam.ca

Claudia Corriveau

Université Laval

claudia.corriveau@fse.ulaval.ca

Résumé

L'algèbre est un élément important des cursus scolaires à travers le monde et sert souvent de filtre pour les filières scientifiques. Afin de favoriser la réussite en algèbre au secondaire, plusieurs chercheurs proposent de développer la pensée algébrique dès le primaire. Quoique dans le Programme de formation de l'école québécoise [PFEQ], contrairement à d'autres programmes de formation du primaire, le développement de la pensée algébrique ne soit visé explicitement, on retrouve implicitement plusieurs éléments qui ont le potentiel de favoriser ce développement. En particulier, la compétence *raisonner à l'aide de concepts et processus*, puisque davantage liée à une manière d'approcher les mathématiques, nous semble une avenue prometteuse. Ainsi, dans ce texte, nous proposons une analyse de raisonnements mathématiques d'élèves de 4^e et 5^e année du primaire (9 à 11 ans) lorsqu'ils résolvent une situation qui a le potentiel de favoriser le développement de la pensée algébrique. Cette analyse permet de constater que 1) les raisonnements sont potentiellement plus riches pour développer la pensée algébrique que les contenus et 2) les élèves, lorsque placés face à une tâche favorisant le raisonnement mathématique, sont en mesure de mettre en œuvre des manières d'approcher les mathématiques typiques de la pensée algébrique.

Mots-clés

Pensée algébrique, Raisonnement mathématique, Généraliser, Identifier une régularité, Prouver, Primaire

1. Développer la pensée algébrique dès le primaire

Depuis quelques années, s'appuyant sur les recherches sur le développement de la pensée algébrique, plusieurs programmes de formation du primaire ont intégré des éléments explicitement liés à la pensée algébrique (Squalli, Suurtamm et Freiman, 2012). Cette initiative cherche à favoriser l'apprentissage de l'algèbre pour tous.

Parmi les régions du monde qui ont inclus des éléments d'algèbre au primaire figurent l'Ontario et plusieurs états américains. Le programme ontarien (Gouvernement de l'Ontario, 2005) s'appuie entre autres sur les travaux de Radford pour introduire l'algèbre et la modélisation comme domaine à l'étude dès la première année du primaire. Le Common Core State Standards Initiative (2010), guide adopté par plusieurs états américains, est un autre exemple. Ce guide préconise l'apprentissage de l'algèbre dès la maternelle. On y retrouve un « *standard* » qui se nomme « *operations and algebraic thinking* ».

Le PFEQ, pour sa part, n'a pas adopté cette approche. Ce n'est qu'à partir du 1^{er} cycle du secondaire qu'il accorde une véritable importance à l'apprentissage des concepts liés à l'algèbre. Or, selon Languier (2015), certains éléments du PFEQ pourraient favoriser le développement de la pensée algébrique avant son introduction officielle.

Partant de ce constat, nous pensons que les élèves québécois ont pu développer ou sont en mesure de développer leur pensée algébrique avant son introduction officielle. Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux raisonnements mathématiques d'élèves qui n'ont reçu aucun enseignement visant le développement de la pensée algébrique lorsqu'ils travaillent à une tâche faisant appel implicitement à des éléments de la pensée algébrique.

1.1. L'algèbre et la pensée algébrique au primaire, de quoi parle-t-on?





Dans le langage courant, l'algèbre est souvent sinon toujours associée à l'utilisation de lettres. Or, comme le précise Kieran (2018), le développement de la pensée algébrique ne nécessite pas nécessairement l'usage de la lettre et inversement, il est possible d'utiliser la lettre sans faire de l'algèbre. En fait, les conceptualisations d'*algèbre* ou de *pensée algébrique*, du courant *early algebra*, s'appuient non pas sur des contenus mathématiques, contenus qui sont d'ailleurs souvent les mêmes que ceux abordés traditionnellement en arithmétique, mais sur des façons particulières de penser et de faire des mathématiques. L'usage du signe d'égalité (ex. Kieran, 1989) ou encore l'étude des régularités (ex. Radford, 2006) en sont des exemples éloquentes. En effet, en arithmétique élémentaire, le signe d'égalité est davantage perçu comme liant une opération ou une chaîne d'opérations à sa réponse numérique. Toutefois, en algèbre, on attribue au symbole d'égalité le rôle d'équivalence, et ce afin de mettre de l'avant certaines propriétés des nombres et de dégager des structures. Pour ce qui est de l'étude des régularités, souvent vue comme une approche d'introduction au domaine algébrique, elle peut aussi être associée au domaine de l'arithmétique (concept de suite). En effet, il est possible d'étudier les suites sans généraliser de façon algébrique en restant dans le domaine calculatoire et en s'intéressant davantage à la recherche

d'une unique réponse qu'à la structure de la relation¹. La figure 1 présente deux solutions d'élèves à un problème de suite qui illustrent deux exemples de généralisation (un exemple arithmétique et un algébrique). Ainsi, l'étude des suites en elle-même ne suffirait pas à initier les élèves à la pensée algébrique, c'est la façon de les traiter qui est importante.

Donc, travailler la pensée algébrique au primaire ne signifie pas nécessairement introduire un symbolisme conventionnel ou ni même de nouveaux contenus, mais constitue davantage une manière différente d'approcher les mathématiques.

Figure 1

Exemples d'une généralisation arithmétique et d'une généralisation algébrique

Voici une suite de dessins réalisée à l'aide de petits carrés :			
			
Dessin n°1	Dessin n°2	Dessin n°3	Dessin n°4
<p>Élève 1 : Généralisation arithmétique Tu dois regarder le n°1 puis faire une addition de 3 chaque fois jusqu'au numéro que tu as pêché.</p>		<p>Élève 2 : Généralisation algébrique Par exemple ; si le n° est 401, il faudra faire $3 \times 401 + 2$. C'est la même chose avec tous les autres nombres.</p>	

Source. Demonty, Fagnant et Vlassis (2015, p. 10).

1.2. Le Programme de formation de l'école québécoise

Comme il a été mentionné, au Québec, l'apprentissage de l'algèbre se fait explicitement à partir de la 2^e année du secondaire. À partir de ce moment l'algèbre prend d'ailleurs une très grande importance. Quant au programme du primaire, l'algèbre n'y a pas encore été intégrée de façon explicite. Toutefois, bien que le développement de la pensée algébrique ne soit pas explicitement visé par le programme de formation du primaire (Gouvernement du Québec, 2001) en vigueur depuis 2001, on peut soulever dans ce programme, comme l'a fait Languier (2015), certains éléments offrant une occasion intéressante de développer la pensée algébrique des élèves québécois. Dans cette optique, le PFEQ du 1^{er} cycle du secondaire (Gouvernement du Québec, 2006) met d'ailleurs de l'avant le potentiel des mathématiques travaillées pour le développement d'une pensée algébrique :

¹ Voir à ce sujet la classification des types de généralisation dans Radford (2006)

Au primaire, par ses diverses activités mathématiques, l'élève a été initié, à son insu, à des préalables à l'algèbre. Mentionnons notamment la recherche de termes manquants par l'utilisation des propriétés des opérations et des relations entre elles, l'appropriation du sens des relations d'égalité et d'équivalence, l'utilisation des priorités des opérations et la recherche de régularités dans différents contextes (p. 253).

Une analyse sommaire des concepts et processus permet de dégager des opportunités pour le développement la pensée algébrique : l'étude des suites et régularités (repérer et décrire) débutée dès le premier cycle tout comme l'étude de différents types de nombres et de leurs propriétés, pair/impair, premier, composé, multiples, l'étude de structures additive et multiplicative, les critères de divisibilité, l'égalité et les équations, les expressions équivalentes, la comparaison, les relations d'ordre.

Du côté des compétences², le développement de la compétence *raisonner à l'aide de concept et de processus* peut aussi potentiellement développer la pensée algébrique dès le primaire. En particulier, le programme lie cette compétence à l'observation de régularités, la classification d'objets mathématiques. La justification d'actions ou d'énoncés mathématiques est aussi un élément important de cette compétence. Nous verrons plus loin en quoi ceci est lié au développement de la pensée algébrique.

En somme, dans le PFEQ, on retrouve implicitement plusieurs éléments qui ont le potentiel de favoriser le développement de la pensée algébrique. En particulier, la compétence raisonnement à l'aide de concepts et processus nous semble une avenue prometteuse puisqu'elle est davantage liée à une manière d'approcher les mathématiques.

2. Un modèle de raisonnement mathématique et la pensée algébrique

Le concept de raisonnement mathématique est présent dans le PFEQ comme une compétence. Toutefois, sa définition ne permet pas de bien caractériser l'activité des élèves en termes de raisonnement mathématique. Le modèle développé par l'une des auteures, Jeannotte (2015), sera utilisé pour l'analyse des raisonnements d'élèves. Dans ce qui suit, nous présentons d'abord le modèle. Par ailleurs, puisqu'il n'est pas propre à la pensée algébrique, nous apporterons ensuite les précisions nécessaires pour mieux appréhender la pensée algébrique.

2.1. Le raisonnement mathématique, au-delà du programme

D'entrée de jeu, précisons que ce modèle se positionne dans une perspective commognitive (Sfard, 2008). Le raisonnement mathématique est vu comme une activité de communication avec d'autres ou avec soi-même dans laquelle il y a inférence d'énoncés à propos d'objets ou de relations mathématiques.

Ce modèle se compose de deux aspects qui sont interconnectés : l'aspect structure et l'aspect processuel. L'idée n'est pas que le raisonnement est soit structure ou soit processus, mais plutôt que l'on peut le regarder d'un point de vue structurel et/ou processuel. La structure fait référence à la manière dont les différents éléments constitutifs du raisonnement sont liés. S'appuyant sur Peirce (s.d.) et Toulmin

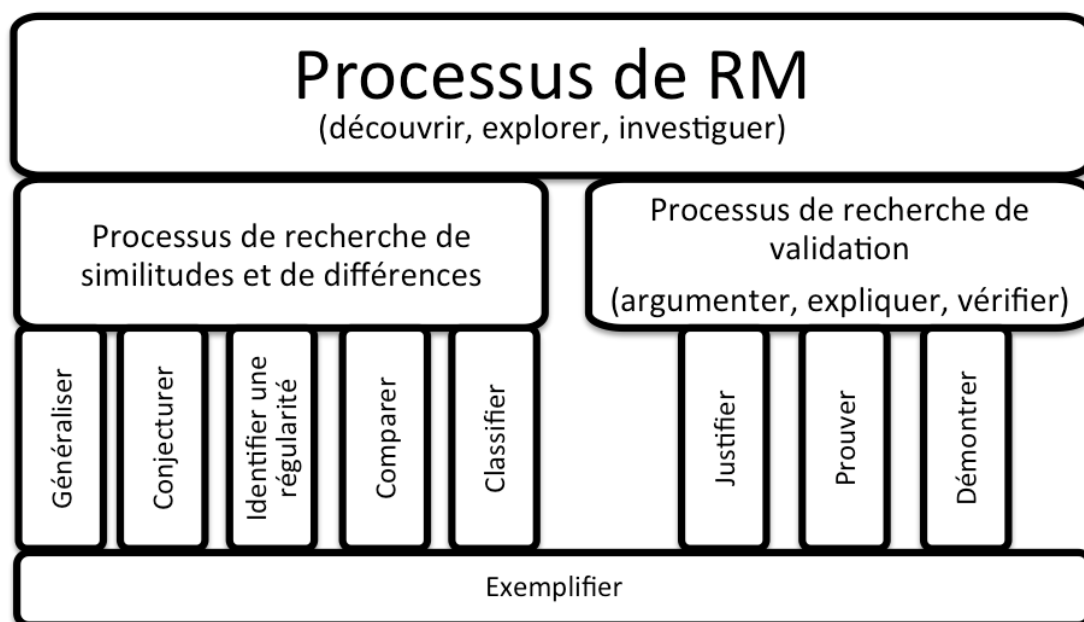
² Le PFEQ comprend 3 compétences en mathématiques : Résoudre des situations problèmes, Reasonner à l'aide de concepts et de processus, Communiquer à l'aide du langage mathématique.

(1958), la structure peut enchaîner plusieurs pas élémentaires : le pas abductif, le pas inductif et le pas déductif. Chacun est composé minimalement des éléments suivants : des données, une règle d'inférence et une affirmation. La différence entre chacun de ces pas est l'élément que l'on cherche.

Du point de vue processuel, le raisonnement est une activité de communication interpersonnelle et individuelle qui est régie par un ensemble de règles partagées par une communauté. Les différents processus seront régis par différentes règles. Par exemple, prouver en mathématique s'appuie sur des règles beaucoup plus strictes que conjecturer. De même, ces règles peuvent varier selon la communauté concernée. Ce qu'on considère comme une « preuve » acceptable au primaire sera bien différente d'une preuve reconnue à l'université. La figure 2 présente une synthèse des processus.

Figure 2

Ensemble des processus de RM



Source. Jeannotte (2015, p. 270).

Dans le cadre plus précis de la pensée algébrique, nous nous intéresserons ici à trois processus de recherche de similitude et de différences (généraliser, conjecturer et identifier une régularité), à deux processus de recherche de validation (justifier et prouver) et au processus exemplifier qui supporte ces deux types de processus :

Généraliser : généraliser, en tant que processus de RM, infère un énoncé à propos d'un ensemble d'objets mathématiques, ou d'une relation entre différents objets de cet ensemble, à partir d'un ensemble plus restreint d'objets contenus dans ce premier.

Conjecturer : conjecturer est un processus de RM qui, par la recherche de similitudes et de différences, permet d'inférer un énoncé à propos d'une régularité, ou d'une relation, pour lequel la valeur épistémique qui lui est rattachée est vraisemblable, et qui a un potentiel de théorisation mathématique.

Identifier une régularité : identifier une régularité, en tant que processus de RM, infère un énoncé à propos d'une relation récursive entre différents objets ou relations mathématiques, par la recherche de similitudes et de différences entre ces objets ou relations mathématiques.

Justifier : justifier est un processus de RM qui, par la recherche de données, de permis d'inférer et de fondement mathématique, permet de modifier la valeur épistémique d'un énoncé.

Prouver : prouver est un processus de RM qui, par la recherche de données, de permis d'inférer et de fondement mathématique, permet de modifier la valeur épistémique de vraisemblable à vraie d'un énoncé. Ce processus est contingenté par :

- des énoncés acceptés par la communauté de la classe (ensemble d'énoncés acceptés) qui sont vrais (du point de vue du discours mathématique de l'expert) et disponibles sans autre justification ;
- une restructuration finale déductive ;
- des réalisations appropriées et connues ou accessibles à la classe.

Exemplifier : exemplifier est un processus de RM qui supporte la mise en œuvre d'autres processus de RM par l'inférence d'exemples qui favorisent

- la recherche de similitudes et de différences ;
- la recherche de validation. (Jeannotte, 2015, p. 271).

Ces processus ne sont pas propres à la pensée algébrique. Néanmoins, comme le propose d'ailleurs Blanton *et al.* (2018)³, ces processus peuvent être considérées des processus de la pensée algébrique lorsqu'ils sont centrés sur l'étude des structures et relations mathématiques. Dans ce qui suit, nous tentons de mieux comprendre la particularisation de ces processus de raisonnement mathématiques lorsqu'ils sont liés à la pensée algébrique.

³ Blanton *et al.* (2018) attachent quatre pratiques à la pensée algébrique : généraliser, représenter, justifier et raisonner à l'aide de structures et de relations mathématiques. Ces pratiques sont capturées par les différents processus de RM. Par ailleurs, ces pratiques ne sont pas propres à la pensée algébrique. Ainsi, pour eux, ce qui est essentiel à ces quatre pratiques pour qu'elles soient considérées en tant que pensée algébrique est qu'elles soient centrées sur l'étude des structures et relations mathématiques.

2.2. Les processus de raisonnement mathématiques soutenus par les habiletés de la pensée algébrique

Squalli (2000) définit la pensée algébrique à travers quatre habiletés :

- 1) l'habileté à penser analytiquement ;
- 2) l'habileté à construire, à interpréter et à valider des modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques ;
- 3) l'habileté à manipuler des expressions algébriques selon des règles prédéfinies ;
- 4) l'habileté à abstraire et à généraliser des relations, des règles, des structures algébriques de même que des structures de situations réelles ou mathématiques (p. 90).

En termes commognitifs, ces habiletés peuvent être redéfinies comme des tendances discursives. Ainsi, dans une classe où l'on cherche à développer la pensée algébrique, on adoptera un discours où ces tendances sont valorisées.

De même, le modèle de pensée algébrique de Malara et Navarra (2018) peut être lié au modèle de raisonnement mathématique de Jeannotte (2015) et vient positionner certains éléments de la définition de Squalli. Ces derniers associent le développement de la pensée algébrique à un changement de l'action mathématique sur le plan de la réflexion mathématique selon trois dualités : 1) représenter vs résoudre ; 2) processus vs produit ; 3) représentation transparente vs opaque. Si l'on voit chacune de ces dualités comme les extrémités d'une droite, le raisonnement des élèves tendrait davantage vers la gauche de chacune (représenter, processus et représentation transparente). Ainsi, les processus de raisonnement, soutenus par les habiletés de la pensée algébrique viseront la représentation de structure mathématique de façon à ce que cette dernière soit transparente, c'est à dire que la représentation permettra de manipuler cette structure permettant ainsi de formuler des énoncés généraux.

3. Objectif

Nous rappelons que notre étude prend place dans un contexte où il n'y a aucune visée de développement de la pensée algébrique explicite dans le programme du primaire. Néanmoins, nous visons étudier comment des élèves du primaire mobilisent des processus de raisonnements mathématiques qui se rapportent à la pensée algébrique. Autrement dit, comment des élèves qui n'ont reçu aucun enseignement visant le développement de la pensée algébrique raisonnent mathématiquement lorsque le développement de la pensée algébrique est implicitement visé par la tâche?

4. Quelques éléments de méthodologie

Les données utilisées pour explorer les raisonnements mathématiques des élèves proviennent de deux projets différents. Le premier visait l'élaboration d'un modèle de raisonnement mathématique (Jeannotte, 2015). Le second visait l'étude de l'utilisation de matériel de manipulation et des raisonnements des élèves en classe du primaire. Ainsi, il n'y avait aucune intention de développer la pensée algébrique des élèves. Or, la tâche utilisée dans ce projet semble, à posteriori, fort appropriée pour étudier comment des élèves déploient une pensée algébrique.

4.1. La tâche Charrière

La tâche Charrière est tirée d'un article de Del Notaro (2011) (Figure 3, à gauche). Elle demande 1) de trouver tous les multiples de 4 qui possèdent un certain nombre de chiffres ainsi que certains chiffres particuliers à une position donnée, puis 2) de générer une règle. Dans la version originale, les nombres recherchés possèdent 4 chiffres, avec un deux à la position des unités de mille et un sept à la position des dizaines (les chiffres possibles à la position des centaines et des unités sont donc à déterminer). Dans la version (Figure 3, à droite) que nous avons proposée aux élèves, un nombre à trois chiffres a été privilégié pour les expérimentations en classe (avec un chiffre donné à la position des dizaines). Deux raisons expliquent cette modification.

Figure 3

Tâche Charrière (deux versions)

<p>1. En équipe de deux, résoudre la tâche suivante :</p> <p>Voici un nombre dont il manque deux chiffres</p> <table border="1" data-bbox="196 894 800 1031"> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">—</td> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;">—</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">U.M</td> <td style="text-align: center;">Centaines</td> <td style="text-align: center;">Dizaines</td> <td style="text-align: center;">Unités</td> </tr> </tbody> </table> <p>a) Trouve (et écrit) toutes les façons de compléter ce nombre pour que la division par 4 ne donne pas de reste.</p> <p>b) Remplace le 7 des dizaines par un autre chiffre (1, 2, 3...) Combien y aura-t-il de possibilités chaque fois?</p> <p>c) Énonce une règle qui te permet de savoir rapidement si un nombre peut être divisé par 4 sans reste.</p>	2	—	7	—	U.M	Centaines	Dizaines	Unités	<p>1. En équipe de deux, résoudre la tâche suivante :</p> <p>Voici un nombre dont il manque deux chiffres</p> <table border="1" data-bbox="886 894 1360 1031"> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">—</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">—</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Centaines</td> <td style="text-align: center;">Dizaines</td> <td style="text-align: center;">Unités</td> </tr> </tbody> </table> <p>a) Trouve (et écrit) toutes les façons de compléter ce nombre pour que la division par 4 ne donne pas de reste.</p> <p>b) Remplace le 7(5) des dizaines par un autre chiffre (1, 2, 3...) Combien y aura-t-il de possibilités chaque fois?</p> <p>c) Énonce une règle qui te permet de savoir rapidement si un nombre peut être divisé par 4 sans reste.</p>	—	5	—	Centaines	Dizaines	Unités
2	—	7	—												
U.M	Centaines	Dizaines	Unités												
—	5	—													
Centaines	Dizaines	Unités													

Premièrement, le PFEQ ne prescrit pas l'enseignement de l'algorithme de division avant le 3^e cycle du primaire. Ainsi, plusieurs élèves ne l'avaient pas encore appris et tablaient sur du matériel de manipulation (blocs base 10) ou encore des schémas pour effectuer les divisions. La gestion du matériel ou des schémas complexifiait alors la tâche et pouvait potentiellement amener des difficultés à gérer la division. Nous aurions pu permettre l'utilisation de la calculatrice comme il est proposé de faire par Del Notaro (2011). Or, l'utilisation de matériel permet de favoriser l'utilisation d'une représentation transparente, c'est-à-dire que le matériel peut aider à mettre en lumière la structure des nombres divisibles par 4.

Deuxièmement, le nombre à trois chiffres permettait tout de même d'identifier des régularités en limitant les erreurs dues à une trop grande quantité de matériel. De même, dans une des classes de 4^e année du primaire, le 7 à la position des dizaines a été modifié pour un 5 pour la même raison.

Pour résoudre cette tâche, l'élève doit être en mesure de faire appel à au moins un des sens de la division comme celui de partage équitable ou encore de groupements égaux. La définition de divisibilité, la gestion du reste de la division, les propriétés des nombres et des opérations permettront de mettre en lumière différents patterns et la structure des relations permettra de pousser plus loin la validation.

4.2. Analyse de la tâche Charrière en termes de pensée algébrique

La tâche Charrière permet de s'intéresser à la structure des multiples de quatre. Pour Kieran (2018), étudier les structures, c'est-à-dire regarder « through mathematical objects at the primary and lower middle school levels means developing awareness of the possible and various ways of structuring number and the numerical operations of arithmetic » (p. 78). Or, pour prouver les règles dégagées, les élèves doivent aller au-delà des nombres pour s'intéresser à leurs propriétés. Les propriétés des opérations sont aussi importantes. Ainsi, la tâche Charrière nécessite un engagement de l'élève qui va au-delà de ce qui est explicitement visé dans le programme. Elle demande à l'élève de déployer différents processus de raisonnement mathématique tels classer, identifier des régularités, conjecturer et généraliser. De plus, c'est en exemplifiant qu'ils seront amenés à générer une ou des règles générales, mais aussi à la justifier et même à prouver ces règles. Comme on le constate à la section 2.2, ces différents processus sont liés d'une façon ou d'une autre au développement de la pensée algébrique.

Par la généralisation des relations en lien avec les multiples de quatre, les élèves seront amenés à interpréter et valider la règle dégagée. Pour se faire, une attention particulière doit être portée sur 1) la structure des multiples de 4 ; 2) le processus de division plutôt que sur le quotient lui-même ; 3) le développement d'une représentation transparente des nombres et opérations. En effet, la représentation des nombres à l'aide de matériel ou encore d'une forme décomposée, l'étude du processus de division et la façon d'écrire le quotient sont trois façons d'aider à identifier une régularité et la prouver. L'habileté à construire, à interpréter et à valider des modèles algébriques d'une situation mathématique et l'habileté à généraliser des relations, des règles sont alors mis à contribution.

4.3. L'expérimentation en classe

Nous avons expérimenté la tâche Charrière en classe de 4^e année et de 5^e année (9-11 ans). Plus particulièrement, les données qui ont été utilisées pour l'analyse sont tirées d'une seule entrevue individuelle avec une élève de 4^e année effectuée au mois de mai 2012, de deux classes de 4^e année (20 élèves chacune, mars 2014) et d'une classe de 5^e (23 élèves, mars 2018).

Pour l'entrevue individuelle, une trentaine de minutes ont été consacrées à la résolution de la tâche, les interventions se sont limitées à demander à l'élève d'écrire le plus possible sur sa feuille et à lui demander de justifier ses affirmations. Elle a eu recours à une calculatrice (à sa demande) et à des pièces de monnaie pour réfléchir à la division. De même, pour l'entrevue, la version à 4 chiffres a été utilisée. Pour les deux classes de 4^e année et la classe de 5^e année, 60 minutes environ ont été consacrées à la

réalisation de la tâche (incluant un retour). Les élèves travaillaient en équipe de deux. Outre l'entrevue individuelle qui a été effectuée uniquement par l'une des deux auteures, ces dernières ainsi que le ou la titulaire de la classe étaient présents pour chacune des expérimentations. Pendant le travail en équipes, des interventions visaient à encourager les élèves à représenter le processus de division à l'aide du matériel et à demander aux élèves de justifier leurs choix et conclusions. Les discussions en grand groupe ont été menées par l'une des deux auteures.

Dans une des classes de quatrième année, la tâche a plutôt été expérimentée avec le chiffre 5 à la position des dizaines. Ce changement a été fait après avoir remarqué que les élèves avaient de la difficulté à gérer les 7 dizaines lors de leur division. En faisant la division par sens partage, ils se retrouvaient avec 30 unités à partager et la gestion du matériel devenait difficile. Ce changement a permis de passer plus rapidement à l'identification de la régularité. De plus, en cinquième année, la tâche a été faite en entier. Dans les deux classes de quatrième année, seule la première partie de la tâche Charrière (la partie a) a été faite. L'élève de 4^e année rencontrée en entrevue individuelle a réalisé l'ensemble de la tâche Charrière (parties a, b et c).

Les élèves des trois classes (4^e et 5^e) avaient accès à du matériel de manipulation (blocs base 10) et pouvaient utiliser du papier et un crayon. Pour les élèves de quatrième année, un partage en grand groupe a mené les élèves à générer une règle de divisibilité par 4 lorsqu'un nombre de trois chiffres a un 7 ou 5 à la position des dizaines. Pour les élèves de cinquième année, un premier retour leur a permis de repérer la régularité pour le nombre à trois chiffres ayant un 7 à la position des dizaines, puis, en dyade, plusieurs ont réussi à générer une règle pour n'importe quel nombre.

4.4. Matériaux et démarche d'analyse

Le corpus de données se compose essentiellement de vidéos de 10 dyades et 3 retours collectifs, d'un enregistrement audio de l'entrevue individuelle et des traces écrites de tous les élèves. D'abord, les vidéos ont été regardées à multiples reprises afin de repérer des moments témoignant de raisonnement mathématique. Ensuite, ces moments ont été transcrits et rattachés aux traces écrites correspondantes. De plus, ces documents ont été codés selon les processus de raisonnement mathématique. Enfin, les raisonnements mathématiques codés ont été interprétés à la lumière de la définition de la pensée algébrique.

5. Analyse de l'activité mathématique des élèves

La présentation de l'analyse se fera en trois temps. Premièrement, on ne peut passer sous silence les difficultés rencontrées par les élèves puisque celles-ci jouent un rôle dans leurs raisonnements. Ensuite, les processus de raisonnements (au sens de Jeannotte, 2015) seront analysés principalement en termes d'exemplification, de processus de recherche de similitudes et de différences et de processus de validation, en particulier, justifier et prouver. Enfin, comme les élèves avaient accès à du matériel s'ils le désiraient, le rôle de ce dernier fera l'objet d'une analyse en soi puisqu'il peut être défini, d'un point de vue commognitif à la fois comme un médiateur visuel et une réalisation d'un objet mathématique. Comme le matériel est tangible et que les médiateurs sont des objets visuels (tangibles ou symboliques) sur

lesquels l'interlocuteur opère et qu'il fait partie de son discours, il peut être considéré comme un médiateur visuel autour duquel un certain discours se développe. De même, l'objet mathématique :

can be defined as a mathematical signifier together with its realization tree, where the realization tree is a hierarchically organized set of all the realisations of the given signifier, together with the realizations of these realisations, etc. (Sfard, 2012, p. 4).

Ainsi, d'une certaine manière, le matériel devient une réalisation, qui accompagné de son signifiant constitue un objet mathématique en soi. C'est autour de cet objet que le raisonnement mathématique se déploie.

5.1. Premier temps de l'analyse : les difficultés observées

Les difficultés liées à la tâche et donc rencontrées par les élèves portent autant sur l'opération de division qui est au cœur de ce problème que sur la génération de la règle qui en est l'objectif principal.

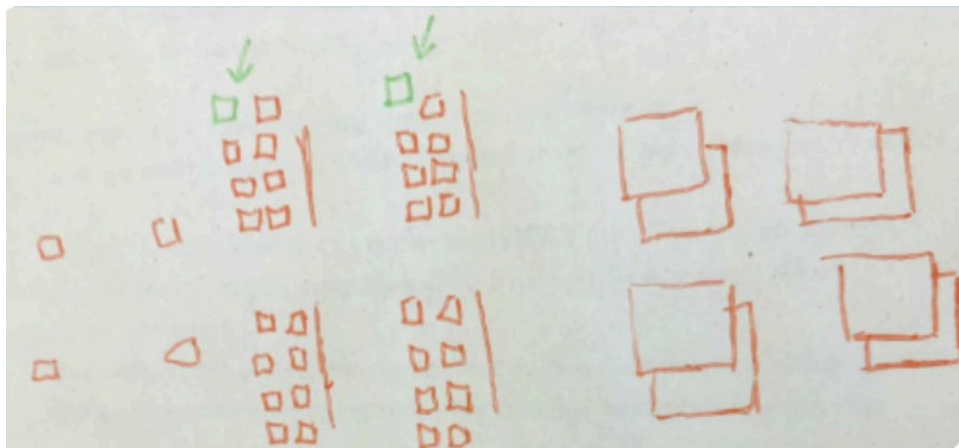
5.1.1. Difficultés en lien avec la division

Une fois le choix d'un nombre fait, les élèves le divisent par 4 et obtiennent un certain résultat. Certains élèves éprouvent de la difficulté à partir d'un résultat non satisfaisant, c'est-à-dire un résultat pour lequel il y a un reste, pour dégager un nouveau nombre qui lui pourrait satisfaire la condition de divisibilité par 4. Par exemple la figure 4 présente une reproduction de ce qu'une élève (classe de 4^e année) a fait à l'aide du matériel de manipulation. Travaillant en équipe, elle effectue la division par 4 du nombre 874, position par position (en orange) sous l'observation de sa coéquipière. Il est à noter que cette élève n'a jamais représenté 874 globalement avant d'effectuer la division. Elle a commencé par prendre 8 centaines et faire 4 piles de 2 centaines, puis elle a pris 4 unités et fait 4 piles de 1, puis elle a procédé à la division des 7 dizaines.

Le résultat des « trois divisions » faites indépendamment selon la valeur positionnelle est illustré à la figure 4. Or, cette équipe demande alors de l'aide, car elles ne savent plus quoi faire lorsque la division ne fonctionne pas. L'intervenante essaie alors de leur faire exploiter le fait qu'il y a deux unités de trop (ou qu'il en manque deux) pour que la division arrive juste. Elle demande « si à ton nombre j'ajoute deux, ça devient quoi ». Elle parle ici du dividende initial, soit 874 qui est écrit sur la feuille de l'élève. Or, cette dernière comprend plus ou moins la requête. Elle vient ajouter 2 unités (en vert sur le schéma) au quotient correspondant à la division des dizaines et répond « 8 ». La difficulté ici réside dans l'articulation entre la manipulation du matériel pour mener la division, la représentation du quotient (ici position par position), le quotient en tant que réponse à la division, la gestion du reste de la division (ici 2 unités), le dividende initial, la modification du quotient initial en coordination avec un dividende divisible par 4.

Figure 4

874 divisé par 4 à l'aide du matériel base-dix par une élève (classe de 4^e)



Dans un même ordre d'idée, des stratégies de division ne sont pas encore (bien entendu) pleinement maîtrisées. Par exemple, une équipe de deux filles (5^e année) tentait d'effectuer la division du nombre 678 et cherchait le multiple de 4 le plus près de 67. Pour ce faire, elles convoquent le plus grand multiple de 4 leur étant connu ($4 \times 12 = 48$) et poursuivent la liste par bonds de 4 jusqu'à 60. Toutefois, cette stratégie est abandonnée et de l'aide est demandée. L'enseignant ramène les deux élèves vers l'algorithme traditionnel enseigné en classe et elles arrivent alors à 169, reste 2. Quoique leur stratégie aurait pu mener à la bonne réponse, elles ne maîtrisaient pas suffisamment les propriétés des opérations pour être en mesure de décomposer le nombre et d'effectuer la division à partir de leur première stratégie. Les difficultés avec l'algorithme amèneront plusieurs équipes à rejeter des essais qui étaient divisibles par 4 et prolongeront le travail sur la tâche. Malheureusement, ces difficultés ont amené certains élèves à cesser de chercher des exemples puisqu'ils n'étaient pas en mesure d'en trouver.

5.1.2. Difficultés en lien avec la génération de la règle

Enfin, des élèves ont eu de la difficulté à récolter les informations nécessaires pour répondre à la question qui est de trouver les nombres qui sont divisibles par 4. Plusieurs élèves n'étaient pas en mesure de savoir quelle information consigner une fois la division par 4 effectuée : le quotient ou le dividende. Ainsi, les élèves qui éprouvent ces difficultés peuvent difficilement se rendre à l'identification d'une régularité et à conjecturer. On peut ici penser que les élèves avaient tendance à se centrer sur la réponse et non sur le processus de division ou encore que l'écriture des nombres en chiffre rendant opaque la structure recherchée.

5.2. Deuxième temps de l'analyse : les processus de raisonnement

Les processus observés chez les élèves relèvent à la fois de la recherche de similitude et de différences que de la recherche de validation.

5.2.1. Les processus de recherche de similitudes et de différences

Les élèves devaient identifier une régularité, conjecturer et donc aussi généraliser. Toutefois, nous avons observé que, pour les trois classes, conjecturer apparaissait souvent avec l'intervention d'un adulte de la classe. En fait, lorsque la régularité est trouvée, elle est souvent généralisée sans que sa valeur de vérité soit mise en cause. Or, lorsque l'adulte amène le doute, les élèves entrent dans le jeu et s'engagent dans un processus de validation.

Toutefois, les élèves n'ont pas attendu la question b) pour générer des règles, mais l'ont fait à différents moments lors de l'expérimentation. Durant l'entrevue individuelle, l'élève de 4^e année a tout de suite cherché une règle pour générer les multiples de quatre, car elle disait ne pas vouloir tout tester. Dès la présentation de la tâche, un élève de 5^e année a énoncé qu'un nombre divisible par 4 doit nécessairement être pair. Toutefois, malgré le fait que cette règle a été explicitée au groupe et même fait l'objet d'une discussion, d'autres élèves de cette classe ont tout de même senti le besoin de tester les nombres impairs lors de la phase d'exploration.

Lors du travail en dyade, certaines équipes et l'élève en entrevue réalisent sans qu'il n'y ait eu de retour sur la tâche que le chiffre à la position des centaines importe peu. Cette réalisation se fait de deux façons différentes. Certains dénotent que 100 se divise par 4, donc, la centaine peut être n'importe quoi. On a ici un pas déductif qui mène à une affirmation vraie. D'autres le dégagent à partir de tous les cas possibles (pour les nombres à trois chiffres). Ici, on a un pas inductif qui mène à un énoncé vraisemblable. Toutefois, l'exhaustion de cas permet de rendre cet énoncé vrai.

Enfin, lors du retour collectif en 4^e année tout comme en 5^e année, les élèves ont été en mesure d'identifier la régularité suivante pour le cas où le chiffre des dizaines est 5 ou 7 : « Un nombre qui se termine par 2 ou 6 est divisible par 4 ». Pour ce qui est du cas général, les deux règles présentées aux figures 5 et 6 ont été générées lors du retour collectif en 5^e année. La règle de la figure 6 a aussi été dégagée par l'élève de 4^e année interviewée.

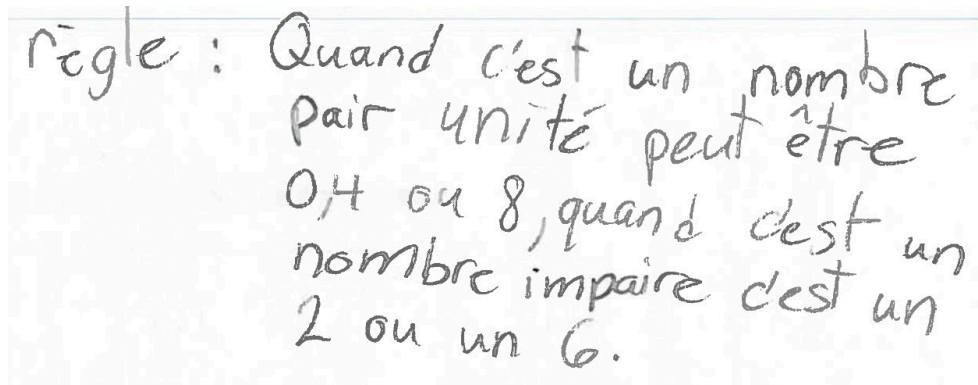
Figure 5

Règle générée par une équipe de 2 lors du retour en 5^e année

Deux dernier chiffres doivent être divisé par 4.

Figure 6

Règle générée par l'élève de 4^e année interviewée



règle : Quand c'est un nombre pair unité peut être 0,4 ou 8, quand c'est un nombre impaire c'est un 2 ou un 6.

Ce qui précède met en évidence que des élèves de 4^e et 5^e année n'ayant reçu aucun enseignement visant le développement de la pensée algébrique sont en mesure d'identifier différentes régularités en lien avec la divisibilité par 4, à conjecturer et à généraliser à partir de la structure des nombres, processus du raisonnement mathématique liés à la pensée algébrique.

5.2.2. Les processus de recherche de validation : justifier et prouver

Un autre élément important de la pensée algébrique est la nature des justifications produites. Dans cette tâche, les élèves ont été en mesure non pas uniquement de justifier, mais aussi, dans certains cas, de prouver (au sens de Jeannotte, 2015) leurs règles. Les prochains paragraphes décrivent ces processus de recherche de validation mis en œuvre par les élèves.

Dans un premier temps, les élèves appuieront leurs processus de recherche de validation sur leur expérience mathématique et sur leurs connaissances mathématiques, mais surtout sur les exemples générés. La table des multiples de 4 fait clairement partie de la culture de la classe et est évoquée à plusieurs reprises (Figure 7 pour un exemple). Les manières de mener la tâche par les élèves laissent supposer que lorsqu'ils ont à effectuer une division, on les ramène aux tables de multiplication. De même, ils ont aussi travaillé les bonds (notamment de 4) avec le tableau de nombres (jusqu'à 100) au 1^{er} cycle du primaire.

Évidemment, faire référence à la table ne permet pas de prouver ce qu'ils ont généré comme règle puisque la régularité de la table n'est pas un énoncé mathématique du point de vue des mathématiques savantes (élément central de la définition). Toutefois cette référence à la table permet d'observer une certaine régularité de la structure dans les nombres qu'elle contient et de justifier la règle au sens où cette dernière semble vraisemblable à la lumière de cette régularité. Bien que cette observation ne permet pas d'« expliquer » pourquoi elle est toujours vraie, elle permet de réaliser que cette régularité est présente ailleurs. La régularité de la table est une autre façon d'orienter le discours de la classe sur la recherche de structures des nombres.

Figure 7

Exploiter la table du 4 pour justifier la règle de la figure 6 (élève de 4^e année interviewée)

Dans la table de 4 ça fait toujours au
nité 0, 4, 8, 2, 6, 0, 4, 8, 2, 6 etc.

En cinquième année, l'exhaustion des cas a été utilisée pour justifier que tous les cas possibles étaient obtenus, mais aussi pour valider la règle (Figure 8). On peut parler ici du processus « prouver ». En effet, en grand groupe, l'exhaustion de cas a été couplée avec le fait qu'une centaine est toujours divisible par 4, donc peu importe le nombre de centaines, notre nombre sera toujours un multiple de 4 s'il se termine par 72 ou 76. On a ici tout ce qu'il faut pour considérer qu'un processus (collectif) a été mis en œuvre et qu'il a mené à prouver la règle lorsqu'il y a un 7 à la position des dizaines. Par ailleurs, c'est la divisibilité de la centaine qui se centre réellement sur la structure et qui permet d'affirmer qu'il y a pensée algébrique. L'exhaustion de cas ne peut être considérée comme un processus de la pensée algébrique en soi quoiqu'acceptable mathématiquement. En effet, ce type de preuve s'appuie davantage sur les réponses et la déduction que sur la structure des nombres.

Figure 8

Exhaustion des cas, équipe de 2 en 5^e année

170	270	370	470	570	670	770	870	970
171	271	371	471	571	671	771	871	971
172	272	372	472	572	672	772	872	972
173	273	373	473	573	673	773	873	973
174	274	374	474	574	674	774	874	974
175	275	375	475	575	675	775	875	975
176	276	376	476	576	676	776	876	976
177	277	377	477	577	677	777	877	977
178	278	378	478	578	678	778	878	978
179	279	379	479	579	679	779	879	979

Enfin, l'exemple générique est utilisé dès la 4^e année pour parler de la structure du nombre avec le vocabulaire propre à l'élève. Par exemple, certains élèves feront directement référence au matériel : « Par exemple, dans 152, si tu brises la 5^e dizaine, tu peux en donner deux petits cubes, mais il en reste 2 ». L'élève cherchait ici à convaincre la classe que pour un 5 à la position des dizaines, on doit nécessairement avoir un 2 ou un 6 à position des unités. Pour ce faire, elle se réfère à 152. Or, il est clair dans son discours que le chiffre 1 des centaines n'est pas important. Elle n'y fait pas référence. Elle ne se centre que sur le reste des dizaines (4 dizaines, ça se divise par 4, pour la 5^e, il reste toujours 2). La structure du nombre est clairement mise de l'avant ici.

À la figure 9, on retrouve le raisonnement d'une élève qui s'appuie aussi sur ce reste de 2 pour prouver la règle présentée à la figure 6 qui peut être reformulée ainsi : « Un nombre qui a un chiffre pair

aux dizaines et se termine par 0, 4 ou 8 est divisible par 4. Un nombre qui a un chiffre impair aux dizaines et se termine par 2 ou 6 est divisible par 4 ».

Figure 9

Une preuve à l'aide d'un exemple générique, élève de 4^e année interviewée

Si on a 2 dizaines les 2 qui
reste vont ensemble et donne 4. Si on
fait $20+20+20+20$ ça va toujours se
diviser par 4. Alors si exemple on fait $20+4$
ça va donner $24+4=28$. Si c'est un
nombre impair à la dizaine il va
rester 2 que l'on devra transférer
au unité, cela va donner exemple 32
 $+4=36$.

Amener les élèves à valider les règles qu'ils ont développées a une importance non seulement en termes de raisonnement mathématique, mais aussi en termes de pensée algébrique. Il s'agit ici d'un élément intéressant de cette tâche puisque l'élève lors des discussions collectives peut se familiariser avec des règles qui régissent le discours mathématique. Par exemple, si un élève justifie le fait que 874 ne peut pas se diviser par 4, car 7 n'est pas divisible par 4, l'enseignant peut rapidement mettre en question ce raisonnement en fournissant un contre-exemple (ex. 872). De même, avec l'aide de l'enseignant, l'attention des élèves peut se centrer sur les données du problème qui permettent d'identifier une régularité. Enfin, en mathématiques, valider des énoncés mathématiques demande de suivre des règles particulières. La tâche Charrière permet de s'appuyer sur les propriétés des nombres et d'amener les élèves à verbaliser dans leurs propres mots les arguments nécessaires.

5.2.3. Exemplifier

Comme on a pu l'observer dans les deux parties précédentes, il est difficile ici de parler des différents processus de RM sans aborder celui d'exemplifier. Cette tâche en vise explicitement la mise en œuvre puisqu'on demande aux élèves de trouver les nombres qui pourront leur servir à générer leur règle, essentiellement, elle leur demande d'exemplifier. On se souviendra que le processus exemplifier vient en support autant aux processus de recherche de similitude que de recherche de validation. Premièrement, les élèves s'appuient sur leurs expériences et connaissances passées pour choisir les nombres qu'ils testent. Par exemple, les nombres impairs sont rarement testés. Certains élèves viendront justifier ce choix, pour d'autres ça restera de l'ordre de l'intuitif. Différentes justifications seront données pour ne pas considérer les nombres impairs. Une élève de 5^e année dira : « J'ai écrit les nombres impairs, mais ça ne se divise pas par 4. Je n'ai pas besoin de les tester ». Une élève de 4^e année (entrevue individuelle) passera plutôt par la table : « Il n'y a pas de nombre impair dans la table du 4 ». La divisibilité par 2 est aussi invoquée. On peut penser que les élèves qui s'appuient sur la divisibilité par 2 pour tester (exemplifier)

uniquement des nombres pairs déploient une pensée algébrique puisqu'il s'appuie déductivement sur les propriétés des nombres pour justifier leur choix.

De même, pour plusieurs, les premiers exemples ont un 4 et/ou un 8 à la position des centaines et des unités. Encore ici, les élèves savent que 8 et 4 sont divisibles par 4. Ils vont donc naturellement vers des essais qui les incluent. Il faut parfois plusieurs essais pour quitter le 8 et le 4 à la position des unités.

Deuxièmement, quelques dyades se sont appuyées sur des calculs pour générer leur exemple dès le début. Par exemple, une dyade de 5^e année, s'appuie sur le fait que $8 \times 9 = 72$ pour ensuite dire que $4 \times 18 = 72$ et donc 472 fonctionne. Il s'agit de leur premier exemple. L'associativité est alors exploitée. Stratégies peut-être développer en calcul mental, cette dernière permet de tabler sur la structure des nombres pour effectuer les calculs et faire des choix éclairés. La flexibilité en calcul mental serait un élément important à développer pour favoriser les apprentissages en algèbre puisqu'il s'agit d'un travail qui exploite la structure des nombres et des opérations.

Troisièmement, plusieurs élèves s'appuient aussi sur les exemples générés pour en produire d'autres en se servant des propriétés des multiples ou de la division. Par exemple, l'équipe qui a généré 472 à partir de 4×18 , ajoutera 4 à 472 pour générer 476. Ils passeront ensuite à 876, 872. Cette équipe ne teste rien d'autre que 72 et 76 et ne fait varier que la centaine en passant par 4, 8 puis 6 et 2. Elle termine ensuite par les chiffres impairs dans l'ordre suivant 1, 3, 5, 9 et 7. Le passage de 1 à 3 est ici plus difficile. Une intervention de l'enseignant a été nécessaire pour que les élèves poussent plus loin leur réflexion. L'enseignant leur demande si 572 fonctionnerait et les élèves répondent qu'ils n'en savent rien. L'enseignant fait alors remarquer qu'ils ont testé que les nombres pairs outre 1. Les élèves continueront donc leur exploration, mais ressentent alors le besoin de faire la division. Ainsi, contrairement à tous les autres cas où le calcul mental est utilisé, pour 3, 5 et 9, l'algorithme de division est venu valider la divisibilité par 4. À travers ce processus d'exemplification, on voit l'exploitation de la structure des nombres pour générer tous les cas possibles à partir de leurs connaissances antérieures. Il ne s'agit pas d'un simple procédé d'essais erreur, mais bien d'essais réfléchis, ce qu'on peut rattacher ici à la mise en œuvre d'une pensée algébrique. En plus de tabler sur les essais qui fonctionnent comme l'équipe précédente, d'autres tableront sur les essais qui ne fonctionnent pas pour en générer d'autres. Une élève de 5^e année tablait sur le reste de 2 de la division de 170 pour justifier l'essai de 172 : « 172 devrait marcher, car on l'a fait avec 170 puis il restait [2] ». Un autre élève de 4^e année rejette l'essai de 453 après avoir testé 454 et observé un reste de 2 :

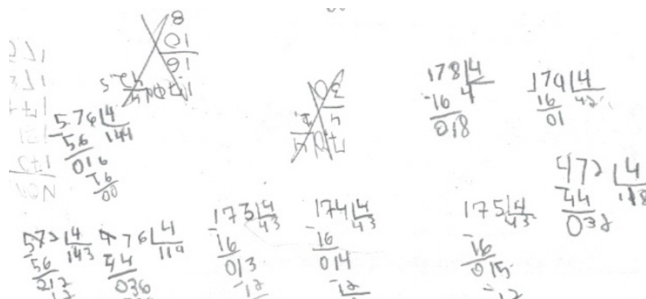
- élève 1 : Est-ce qu'on essaie 453?
- élève 2 : Non, essayons 452, avec 453, il restera 1.

Toutefois, à quelques exceptions près, ces raisonnements sont plus ou moins contrôlés puisque l'élève sent le besoin de tester la division ou doute malgré le fait que le raisonnement s'appuie sur une structure déductive qui ne peut mener qu'à une valeur épistémique vraie. On le voit bien avec le dernier exemple, si je suis capable de dire qu'il restera 1 à 453, je devrais être capable de dire qu'il restera 0 pour 452.

Quatrièmement, on s'attendait à ce que les bonds de 4 soient davantage réinvestis pour générer des exemples puisque les comptines par bond sont travaillées dès le 1^{er} cycle. Or, c'est rarement le cas. Par exemple, à la figure 10, les essais, quoique suivant une certaine logique, ne s'appuient pas sur les propriétés de la division. En effet, les élèves ont débuté par 170 à 179 (171 et 172 sont plus bas sur la feuille). 472, 476, 572 et 576 sont venus après, ce sont les seuls qui utilisent ce bond de 4.

Figure 10

Des essais plus ou moins systématiques, équipe de deux, 5^e année



Cinquièmement, lorsque les essais ne sont pas systématiques dès le début, l'exemplification se systématise avec le temps. À la figure 11, une élève après avoir fait trois essais non systématiques, conclut qu'un 2 est nécessaire à la position des unités. Toutefois, elle se ravise et s'appuie sur 2372 pour générer 2376 (qu'elle ne teste pas) puis fait varier la centaine de façon systématique : 4, 5 en testant uniquement pour 72 et non pour 76. Cette nouvelle façon d'exemplifier lui permettra de conjecturer à propos du rôle du chiffre à la position des centaines et des unités : « comme j'ai essayé plusieurs centaines, je crois que c'est l'unité qui importe ».

Figure 11

Systématisation des essais, élève de 4^e année interviewée

pour que ça marche il
faut un 2. 2372-2376-
2472-2476-2572-2576-

5.3. Troisième temps d'analyse : le rôle du matériel et des schémas

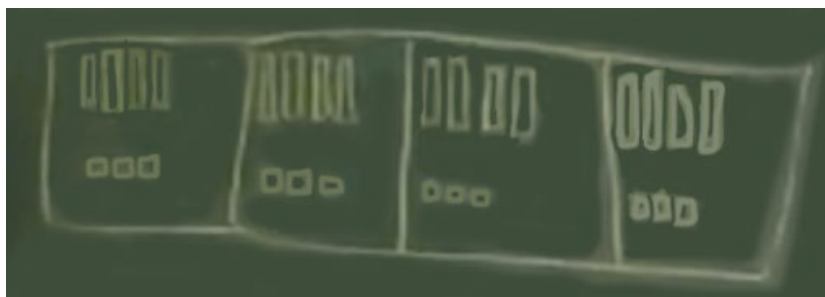
Comme mentionné dans la section méthodologie, dans cette expérimentation, le matériel joue un rôle important pour donner accès à la généralité. Le reste de la division prend tout son sens ici. L'action de partager et de comprendre la structure d'un nombre divisible par 4 est accessible via le matériel. Malheureusement, la calculatrice donne peu d'indices sur le phénomène mathématique qui survient. Pour ce qui est de l'algorithme de division, au Québec, la division euclidienne est peu ou pas travaillée au primaire. Ainsi, s'il y a un reste, la réponse de la division est donnée en nombre décimal. Or, dans cette tâche, exprimer la réponse de la division par un nombre entier et un reste est un élément important pour comprendre et surtout prouver le phénomène mathématique sous-jacent. À la figure 9, c'est à la suite de

la manipulation du matériel et l'étude du reste de la division à la position des dizaines que l'élève a été en mesure de prouver sa conjecture.

À la figure 12, on voit un schéma de matériel qui a permis à l'élève de justifier pourquoi 172 puis 176 était divisible par 4. La représentation de la division à l'aide de schéma de blocs base dix et du sens partage favorise l'utilisation de la propriété des multiples de 4 à savoir que si j'ajoute 4 à un multiple de 4, j'ai toujours un multiple de 4.

Figure 12

Une schématisation d'un élève de 4^e de 172 divisé par 4 lors du retour



Par ailleurs, l'utilisation uniquement du matériel sans support écrit ou schéma a parfois causé des difficultés. En effet, à la figure 4, on retrouve une utilisation du matériel qui n'a pas permis aux élèves de l'équipe de bien comprendre la division. En effet, comme elles n'avaient jamais représenté le dividende avant d'effectuer la division autre que par écrit, c'est lors du retour à l'écrit que les deux coéquipières ont réussi à surmonter leur difficulté et comprendre que si on ajoute deux à 874, la division arrive juste (articulation entre l'écriture et la réalisation matérielle).

En fait, ce qu'on peut conclure c'est le que matériel vient teinter, les raisonnements des élèves. Les élèves, lorsqu'ils manipulent parleront de briser le bâton en cube, de plaque, ils utiliseront des déictiques. Ils peuvent ainsi raisonner sur la structure et non uniquement sur le résultat de la division.

6. Discussion

Globalement, l'analyse des raisonnements d'élèves qui ont réalisés la tâche Charrière permet de constater que ces derniers sont en mesure de déployer des raisonnements mathématiques qui fait appel à des éléments de la pensée algébrique. Pour se faire, non seulement doivent-ils se centrer davantage sur la structure des nombres et opérations en jeu mais aussi développer des représentations qui permettent de « voir » ces structures. Les processus d'exemplification prennent alors un rôle primordial dans l'activité des élèves puisqu'ils supportent autant les processus de recherche (*identifier une régularité, conjecturer et généraliser*) que ceux de validation (*justifier et prouver*). Or, l'habileté à exemplifier repose en partie, à tout le moins pour cette tâche, sur les compétences calculatoires des élèves. Les élèves qui ont tendance à calculer à partir de la structure des nombres, ce qu'on relie au calcul réfléchi, sont davantage en mesure de créer des exemples pertinents et de tableur sur ces exemples pour identifier des régularités, conjecturer, généraliser et enfin, justifier et prouver. Selon Linchevski et Livneh (1999), les difficultés en algèbre

prennent naissance dans les difficultés des élèves à comprendre la structure des nombres. La tâche Charrière a donc donné l'opportunité aux élèves de déployer des raisonnements mathématiques liés à la pensée algébrique en travaillant la structure des nombres.

Dans un autre ordre d'idée, selon Arcavi, Drijvers et Stacey (2017), les classes du primaire mettent peu l'accent sur les structures mathématiques. Or, non seulement le PFEQ propose des ancrages qui pourraient potentiellement favoriser le développement de la pensée algébrique (Larguier 2015), mais les élèves sont en mesure de déployer des raisonnements mathématiques qui s'appuient sur des caractéristiques de la pensée algébrique et ce sans enseignement explicite de l'algèbre. Une question se pose ici. En quoi la pratique enseignante actuelle peut potentiellement favoriser le développement de la pensée algébrique? En effet, on peut faire l'hypothèse que l'activité mathématique que les élèves ont mis en œuvre durant la réalisation de la tâche Charrière prend appui sur le discours mathématique développé par ces derniers dans leur expérience passée en particulier en tant qu'apprenant des mathématiques. Ceci apparaît comme une bonne nouvelle dans la mesure où, comme Sfard (2008) le mentionne d'un point de vue commognitif, la participation de l'élève dans un discours mathématique, quoique hautement située, s'appuie sur sa propre expérience.

Conclusion

Le développement de la pensée algébrique demande non seulement d'aborder certains concepts différemment de la manière dont ils sont habituellement travaillés en arithmétique, mais aussi un changement de culture scolaire.

As a socially mediated process whereby one's thinking about symbols and referent is iteratively transformed (ibid.), the act of representing not only gives expression to the generalizations children notice in problem situations, but also shapes the very nature of their understanding of these concepts (Blanton *et al.*, 2018, p. 31).

Toutefois, l'idée n'est pas d'introduire le symbolisme formel, mais d'introduire des manières d'approcher algébriques. Malara et Navarra (2018) parlent ainsi d'approcher l'apprentissage de l'algèbre à la manière dont les jeunes enfants apprennent à parler, en commençant par développer un certain « *algebra babbling* » pour se diriger vers un discours de plus en plus structuré et formalisé. Ceci cadre bien avec la définition commognitive du raisonnement mathématique prise ici puisque l'apprentissage y est vu comme un changement de discours.

Cette tâche par son accent sur les relations de divisibilités, l'opération de division et de multiplication (lien entre être divisible par 4 et multiple de 4) et la représentation de la division à l'aide du matériel, de schémas et d'exemples génériques a permis aux élèves de mettre en œuvre plusieurs processus de raisonnement mathématique et d'ainsi développer leur habileté à généraliser des règles et des relations.

Toutefois, cette tâche est très loin de la culture de la classe du primaire. En effet, les enseignants avec qui nous avons collaboré ont reconnu ne pas faire ce genre de tâche en classe. En fait, malgré qu'ils

reconnaissaient les contenus propres au primaire, ne l'associaient pas à une tâche visant des apprentissages du primaire. Or, les élèves québécois sont en mesure de mettre en œuvre des raisonnements mathématiques qui vont au-delà de ce qui est « prescrit » dans le programme. La question qui se pose alors est comment favoriser un certain changement de culture qui pourrait favoriser le développement du raisonnement mathématique et donc, par le fait même, de la pensée algébrique dès le primaire.

Références

- Arcavi, A., Drijvers, P. et Stacey, K. (2017). *The learning and teaching of algebra : Ideas, insights, and activities*. New York : Routledge.
- Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Murphy Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N. L. et Stylianou, D. (2018). Implementing a Framework for Early Algebra. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds : The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 27-50). Hamburg : Springer International Publishing.
- Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM)*. Washington, DC, National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.
- Del Notaro, C. (2011). Une situation ouverte en mathématiques : rapports dialectiques entre Théorie - Expérimentation - Contingence. *Recherches en éducation*, 10, 56-68. Récupéré de <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:18348>
- Demonty, I., Fagnant, A. et Vlassis, J. (2015). Le développement de la pensée algébrique : quelles différences entre les raisonnements mis en place par les élèves avant et après l'introduction de l'algèbre? Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque EMF 2015. Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*.
- Gouvernement de l'Ontario. (2005). *Le curriculum de l'Ontario de la 1^{re} à la 8^e année. Mathématiques*. Ministère de l'Éducation.
- Gouvernement du Québec. (2001). *Programme de formation de l'école québécoise, Éducation préscolaire, Enseignement primaire*. Ministère de l'Éducation.
- Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle, domaine des mathématiques, des sciences et de la technologie*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.
- Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique : proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire* [Thèse de doctorat]. Université du Québec à Montréal. Archipel.

- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra : A structural perspective. Dans S. Wagner et C. Kieran (dir.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (p. 35-56). Erlbaum ; National Council of Teachers of Mathematics.
- Kieran, C. (2018). *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds : The global evolution of an emerging field of research and practice*. Hamburg : Springer International Publishing.
- Larguier, M. (2015). Première rencontre avec l'algèbre. Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque EMF 2015. Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*.
- Linchevski, L. et Livneh, D. (1999). Structure sense : the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 173–196.
- Malara, N. A. et Navarra, G. (2018). New words and concepts for early algebra teaching : sharing with teachers : epistemological issues in early algebra to develop students' early algebraic thinking. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds : The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 51-78). Hamburg : Springer International Publishing.
- Peirce, C. S. (s.d.). *The collected papers of Charles Sanders Peirce. Electronic edition*. Charlottesville, VA : InteLex.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns : A semiotic perspective. Dans S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz et A. Méndez (dir.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American chapter* (vol. 1, p. 2-21). Mérida, Mexico : Universidad Pedagógica Nacional.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating : human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Sfard, A. (2012). Introduction : Developing mathematical discourse--Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, 51-52(3), 1-9.
- Squalli, H. (2000). Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base [thèse de doctorat]. Université Laval, Québec. Bibliothèque et Archives du Canada.
- Squalli, H., Suurtamm, C. et Freiman, V. (2012). Préparer les enseignants au développement de la pensée algébrique au primaire et au secondaire. Dans S. Oesterle, D. Allan et P. Liljedahl (dir.), *Actes de la rencontre annuelle du Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques* (p. 125-136).
- Toulmin, S. E. (1958). *Les usages de l'argumentation. L'interrogation philosophique*. Paris : Presses Universitaires de France.

Chapitre 6

Raisonnements lors de la résolution de problèmes déconnectés : exemples prototypiques et analyse de productions d'élèves

Adolphe Adihou

Université de Sherbrooke

adolphe.adihou@usherbrooke.ca

Mirène Larguier

Université de Montpellier

miren.larguier@gmail.com

Alain Bronner

Université de Montpellier

alain.bronner@umontpellier.fr

Résumé

Dans cet article nous présentons des exemples prototypiques de résolutions de problèmes de comparaison de type déconnecté (Marchand et Bednarz, 1999, 2000). L'étude s'appuie sur la grille d'analyse élaborée par Squalli, Bronner, Larguier et Adihou (2020) portant sur l'analyse des raisonnements possibles lors de la résolution de problèmes de partage inéquitable pouvant être utilisés au primaire et au début du secondaire et le recours aux outils de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999), notamment au concept de praxéologie pour caractériser explicitement les types de raisonnements selon différents niveaux technique, technologie et théorie. L'originalité réside dans la proposition d'exemples prototypiques que nous avons créés a priori (grille d'analyse des praxéologies) et l'analyse grâce à cette même grille des productions d'élèves français et québécois de 12 à 14 ans lors de la résolution effective des problèmes. Notre étude vise à mettre en évidence des indicateurs pour repérer le développement de la pensée algébrique notamment dans une zone floue difficile à interpréter entre deux extrêmes qui sont, soit un raisonnement typiquement arithmétique soit typiquement algébrique.

Mots-clés

Didactique, Algèbre, Raisonnement, Problèmes déconnectés, Caractère analytique

Introduction

Le travail présenté dans cet article s'inscrit dans les travaux de l'OIPA (Observatoire international de la pensée algébrique). Il concerne une équipe de chercheurs français et québécois des universités de Sherbrooke et de Montpellier. Il fait suite à une première étude (Adihou, 2020) qui visait à documenter les raisonnements des élèves lors de la résolution de problèmes déconnectés au sens de Bednarz et Dufour-Janvier (1994) et Bednarz et Janvier, 1996). Cette étude rend compte de l'analyse globale de 1993 copies d'élèves québécois selon les critères d'une grille d'analyse (Squalli, Bronner, Larguier et Adihou, 2020) reprise dans cet article¹. En nous fondant sur les résultats de cette première étude (Adihou, 2020) nous étayons notre travail sur deux hypothèses. La première renvoie au fait que la résolution de certains problèmes proposés avant l'introduction de la notation algébrique conventionnelle pousse l'élève à produire des raisonnements favorisant le développement de la pensée algébrique. Il s'agit de problèmes ne permettant pas la mise en œuvre d'une technique purement arithmétique. La deuxième stipule que parmi ces problèmes se trouvent les problèmes « déconnectés » au sens de Bednarz et Dufour-Janvier (1994) et Bednarz et Janvier (1996). Adihou (2020) propose une dizaine d'exemples de ces problèmes déconnectés ainsi que leur description en fonction des critères définis par Bednarz et Dufour-Janvier (1994) et Bednarz et Janvier (1996). Ce type de problème conduit l'élève à abandonner une démarche arithmétique de résolution, et le pousse à imaginer des raisonnements le faisant entrer dans des raisonnements analytiques ou à tendance analytique (Squalli *et al.*, 2020). Le raisonnement analytique de type hypothético-déductif se caractérise par le fait de déterminer la valeur d'une inconnue, en faisant comme si cette valeur existait et d'opérer sur elle comme si on opérait sur des nombres connus. À ce titre, Larguier (2015) illustre bien les « comme si »² inhérents à la pensée algébrique en précisant, en lien avec une activité (Les maisons en allumettes) qu'elle

s'exprime par un raisonnement qui *mobilise* au moins une donnée inconnue en opérant sur elle comme si elle était connue. Ce type de raisonnement nécessite une fiction : faire comme si ce nombre était connu et calculer avec lui comme avec les nombres connus.
(p. 321)

Pour Squalli (2015) la pensée algébrique est vue comme une manière de penser dans ces activités algébriques. Il précise que :

¹ Les critères et la grille d'analyse seront présentés plus loin dans ce texte.

² Larguier (2015, juin) illustre cette fiction comme si : « On fait comme si la réalité de l'énoncé permettait d'inventer une nouvelle réalité ; On fait comme si on était 100 élèves, comme s'il y avait 2 bouchons : le réel est donc modifiable à condition de ne pas modifier les relations mathématiques ; On fait comme si on connaissait tous les nombres utilisés : les nombres « connus » remplacés par des paramètres comme les nombres inconnus remplacés par des variables ; On fait comme si les nombres désignés à l'aide de lettres étaient connus pour opérer sur eux ; On fait comme si le problème était résolu pour le modéliser dans le registre des expressions algébriques (pensée analytique) ».

Sur le plan opératoire, la pensée algébrique se déploie au moyen d'un ensemble de raisonnements particuliers et de manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (par exemple, une tendance à voir l'égalité comme une relation d'équivalence, une tendance à laisser les opérations en suspens ; une tendance à symboliser et à opérer sur des symboles ; une tendance à avoir une vision structurale (voir par exemple une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calcul) (p. 347).

La référence à la fiction « comme si » exprimée par Larguier (2015) et la mise en évidence du processus opératoire de la pensée algébrique selon Squalli *et al.* (2020) rejoignent le point de vue de Radford (2014, 2015), pour qui la pensée algébrique élémentaire comprend trois composantes :

- (1) indéterminés : la situation mathématique considérée contient des nombres non connus (inconnues, variables, paramètres, etc.) ; c'est-à-dire, elle contient des indéterminés. L'indétermination permet ainsi de convoquer l'inconnue.
- (2) dénotation : les nombres indéterminés impliqués dans la situation doivent être nommés ou signifiés d'une certaine manière. [...] On peut utiliser des signes alphanumériques, mais pas nécessairement. La dénotation de nombres indéterminés peut également être signifiée par le langage naturel, les gestes, les signes non conventionnels (diagrammes, par exemple), ou même une combinaison de ceux-ci [...]
- (3) analyticité : les nombres indéterminés sont traités comme s'ils étaient des nombres connus. C'est-à-dire, bien qu'ils ne soient pas connus, les nombres indéterminés sont traités de la même manière que les nombres connus : on les additionne, les soustrait, les multiplie, les divise, etc. (Radford, 2015, p. 341)

Au regard des différents travaux sur le développement de la pensée algébrique et des différentes caractérisations de celle-ci, le raisonnement analytique est au cœur du raisonnement algébrique et joue un rôle important en lien avec l'acquisition d'une diversité d'ostensifs pour représenter les inconnues. C'est ce que stipule Radford (2015) avec la notion de dénotation. En effet, la représentation symbolique s'impose dans certaines activités dans lesquelles le raisonnement analytique est sollicité. Il est important de développer chez l'élève des compétences pour représenter des relations entre des quantités non déterminées pour généraliser des propriétés, des opérations arithmétiques et pour généraliser à partir de régularités.

Le travail que nous avons engagé résulte notamment d'une question en lien avec le repérage d'une zone floue dans les productions des élèves. Cette question est la suivante : comment caractériser les productions situées dans cette zone qui ne peuvent être analysées comme étant clairement soit arithmétiques soit algébriques? En effet dans Adihou (2020) et Adihou, Squalli, Saboya, Tremblay et Lapointe (2016), il est difficile d'interpréter le développement de la pensée algébrique à travers certains raisonnements qui ne sont ni typiquement arithmétiques, ni typiquement algébriques. Ces types de raisonnement caractérisent la zone floue et difficile à interpréter.

Squalli *et al.* (2020) s'appuient sur des dimensions épistémologiques et historiques relatives au développement de la pensée algébrique et sur les registres de représentation sémiotique. Il propose un cadre et une grille d'analyse en vue de catégoriser les types de raisonnements en fonction de leur degré d'analyticité. Cette grille d'analyse qui a été développée précédemment est reprise dans notre étude.

Au regard des diverses caractérisations des types de raisonnements, la pensée algébrique se déploie à travers un ensemble de type de tâches, de techniques et de technologies et avec un langage particulier. En partant d'un problème déconnecté, nous avons analysé et produit des exemples, appelés exemples prototypiques des types de raisonnements. L'analyse articule la grille de Squalli *et al.* (2020) et la démarche en quatre étapes (Tâche, Technique, Technologie, Théorie), issue de la praxéologie didactique de Chevallard (1999). Elle a permis de concevoir une grille spécifique d'exemples prototypiques que nous appelons grille d'analyse des praxéologies. Cette grille assure deux fonctions construites en dialectique : a priori un outil de référence avec la proposition d'exemples prototypiques créés et a posteriori un outil d'analyse de productions d'élèves. La pertinence de ce travail réside également dans l'articulation de la grille développée par Squalli *et al.* (2020) avec les outils de la théorie anthropologique du didactique (TAD) de Chevallard (1999).

1. Contexte et cadre théorique

1.1. Éléments du curriculum officiel en France

Au moment de l'introduction de l'algèbre dans le curriculum officiel de France, le langage algébrique est introduit avec l'utilisation de lettres et l'élève est confronté à des problèmes nécessitant un raisonnement analytique.

Dans le cas de la France, l'algèbre est introduite au cycle 4. Les savoirs algébriques sont enseignés à des élèves âgés entre 13 et 15 ans en vue de développer différentes compétences générales (Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse [MENJ], 2018) :

- représenter : Choisir et mettre en relation des cadres (numérique, algébrique, géométrique) adaptés pour traiter un problème ou pour étudier un objet mathématique [...]
- calculer : Calculer en utilisant le langage algébrique (lettres, symboles, etc.) [...]
- communiquer : Faire le lien entre le langage naturel et le langage algébrique. Distinguer des spécificités du langage mathématique par rapport à la langue française. (p. 148)

En France l'algèbre apparaît essentiellement comme un outil langagier et ne semble pas pouvoir exister comme domaine mathématique sans l'utilisation de la lettre. Pourtant, nous soutenons dans nos travaux que l'avènement officiel de l'algèbre peut être préparé lors des années précédentes en développant la pensée algébrique « avant la lettre ». C'est le choix didactique qui a été fait au Québec dans le curriculum officiel.

1.2. Éléments du curriculum officiel au Québec

Au Québec, en algèbre, d'après le Programme de formation de l'école québécoise (PFEQ) (Gouvernement du Québec, 2006) du premier cycle du secondaire et la Progression des apprentissages (PDA) (Gouvernement du Québec, 2016) du secondaire, l'élève recourt à différents modes de représentation. Il construit des expressions algébriques, des tables et des graphiques pour généraliser, interpréter et résoudre un problème. Il identifie l'inconnue et, à l'aide de la résolution d'équations, en découvre la ou les valeurs et les interprète selon le contexte. Il généralise une situation à l'aide d'une expression algébrique et, s'il s'agit d'une équation, détermine et interprète l'inconnue, selon le contexte (Gouvernement du Québec, 2016, p. 13). L'élève s'initie au sens de l'expression algébrique par des manipulations telles que la réduction ou le développement d'expressions algébriques, la résolution d'équations à une inconnue et la modélisation de situations par une traduction en écriture algébrique. Il exploite certains procédés algébriques pour démontrer la véracité d'une conjecture, résoudre des équations ou appliquer des formules. Il interprète des expressions algébriques et les associe aux divers modes de représentation, ce qui lui permet de coordonner les éléments du langage (Gouvernement du Québec, 2016, p. 16).

Ces activités sont favorisées par le travail qui avait été fait au primaire et qui se poursuit au secondaire comme le mentionnent explicitement le PFEQ et la PDA :

Au primaire, les élèves ont acquis des connaissances préalables à l'algèbre grâce à diverses activités mathématiques. Mentionnons notamment la recherche de termes manquants par l'utilisation des propriétés des opérations et des relations entre elles, l'appropriation du sens des relations d'égalité et d'équivalence, le respect de la priorité des opérations et la recherche de régularités dans différents contextes. (Gouvernement du Québec, 2016, p. 13 ; Gouvernement du Québec, 2006, p. 253)

Au 1er cycle du secondaire, on assiste au passage de la pensée arithmétique à la pensée algébrique. Les élèves exploitent et approfondissent le sens du nombre, des opérations et de la proportionnalité. Par exemple, dans l'observation de régularités, alors qu'au primaire, ils établissent la règle de construction d'une suite de nombres d'un terme à l'autre, au secondaire, ils établissent le lien entre le terme et son rang. Les expressions algébriques s'ajoutent aux registres (modes) de représentation dont ils disposent pour observer des situations selon des points de vue différents. (Gouvernement du Québec, 2016, p. 13)

Le curriculum officiel du Québec stipule ainsi clairement l'articulation des programmes du primaire et du secondaire : « Au primaire, les élèves ont acquis des connaissances préalables à l'algèbre grâce à diverses activités mathématiques » (Gouvernement du Québec, 2016, p. 13). Des types de situations sont explicitement recommandés. Nous pouvons noter en particulier que la recherche de régularités est mentionnée plusieurs fois ce qui fait écho à de nombreuses recherches concernant l'algèbre élémentaire (voir plus loin dans ce texte).

1.3. Assises théoriques

Différents cadres théoriques sont utilisés pour analyser les activités algébriques et les productions des élèves face à ces situations : l'analyse des structures de problèmes additifs et multiplicatifs (Vergnaud, 1982), l'analyse multidimensionnelle de l'algèbre (Grugeon, 1997, 2000), l'analyse praxéologique (Chevallard, 1999), l'analyse-synthèse (Coulange, 2000 ; Gascón, 1994). Dans ces analyses certains articulent implicitement ou explicitement les dimensions sémantique, syntaxique et sémiotique (Duval, 1991, 2006). D'autres ont recours au jeu de cadres et aux dialectiques ancien/nouveau et outil/objet (Douady, 1984, 1986). Ces analyses mettent en évidence le degré de complexité des situations, de même que les difficultés et erreurs des élèves lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre, corroborant des observations de plusieurs autres chercheurs (Bronner, 2015 ; Chevallard, 1989 ; Kieran, 1992 ; Larguier, 2015 ; Vergnaud, 1987). Parmi ces derniers, certains visent différents types de problèmes : la généralisation à partir de contextes géométriques ou numériques, ou la recherche d'une inconnue pouvant être obtenue par la traduction d'une équation algébrique (Adihou *et al.*, 2016 ; Saboya, Besançon, Martin, Adihou, Squalli et Tremblay, 2014). D'autres recherches ont permis l'étude des problèmes de comparaison (Bednarz et Dufour-Janvier, 1994 ; Câmara et Oliveira, 2010 ; Coulange, Drouhard, Dorier et Robert, 2012 ; Marchand et Bednarz, 1999, 2000 ; Oliveira et Câmara, 2011 ; Oliveira et Rhéaume, 2014 ; Van Doreen, Verschaffel et Onghena, 2002 ; Vergnaud, 1982, 1987 ; Vergnaud, Cortes et Favre-Artigue, 1988). Ces problèmes valorisent des raisonnements algébriques, mais ce n'est pas dans la perspective de caractériser explicitement l'analyticité des raisonnements.

Bednarz et Dufour-Janvier (1992), en s'appuyant sur le cadre conceptuel de Vergnaud (1982) développé autour du calcul relationnel dans les problèmes arithmétiques, distinguent les problèmes dits connectés et les problèmes dits déconnectés (Bednarz et Dufour-Janvier, 1994). Un problème connecté comporte :


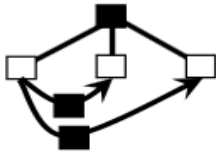
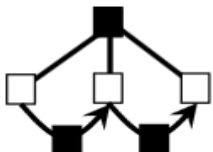
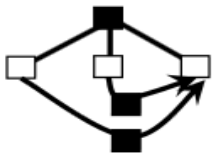
une relation [qui] peut facilement être établie entre deux données connues, induisant alors un raisonnement de type arithmétique s'articulant sur les données connues du problème pour aboutir en fin de processus à retrouver la donnée inconnue [...]

tandis que dans un problème déconnecté « aucun pont ne peut être établi a priori directement entre les données connues du problème » (Bednarz et Dufour-Janvier, 1994, p. 279).

Les auteurs identifient trois classes de problèmes : des problèmes de taux, de comparaison et des transformations dans le temps. Selon les relations, les problèmes de comparaison peuvent être de type « puits » ou « source » ou « composition » (Figures 1 et 2). Ils proposent une grille modélisant les données et les relations et permettant de caractériser les types de problèmes et de les analyser. Les problèmes déconnectés favorisent le développement d'un raisonnement analytique. Selon nos hypothèses, les problèmes déconnectés font partie des classes de problèmes favorisant le développement de la pensée algébrique.

Figure 1

Nature et structure des problèmes de comparaison

Problèmes avec UNE relation de comparaison (additive ou multiplicative)	
SOURCE Les deux relations ont la même donnée comme point de départ.	
COMPOSITION Une des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre.	
PUITS Les deux relations ont la même donnée comme point d'arrivée.	

Source. Saboya et al. (2014, p. 115)

Figure 2

Exemples de problèmes déconnectés

Problème déconnecté avec une relation	Problème déconnecté de type source
Pablo et Claire jouent à l'awalé, ils ont ensemble 48 graines. Pablo a 20 graines de plus que Claire. Combien de graines ont-ils chacun?	Gaëtan, Alice et Samuel ont ensemble 67 romans. Alice a 15 romans de plus que Gaëtan et Samuel en a le double de Gaëtan. Combien de romans chacun a-t-il ?

Le cadre d'analyse développé par Squalli *et al.* (2020) repris dans cette étude, renvoie à deux dimensions : 1) le degré d'analgycité du raisonnement, 2) la nature du registre de représentation sémiotique. La première dimension, relève de raisonnement analytique de type hypothético-déductif se caractérise par le fait de déterminer la valeur d'une inconnue, en faisant comme si cette valeur existait et en opérant sur elle comme si on opérât sur les nombres connus. La seconde dimension relève des types de registres au sens de (Duval, 1911, 2006). Ces deux dimensions visent à cerner la nature analytique des raisonnements et la nature des registres de représentation utilisés par le biais de trois catégories de raisonnements : non analytiques, à tendance analytique et analytiques, ainsi que trois grandes catégories de registres de représentation : purement numérique, intermédiaire et algébrique.

Nous articulons le cadre d'analyse développé par Squalli *et al.* (2020)³ sur lequel repose une grille, mais également, la TAD (Chevallard, 1999) et en particulier le concept de praxéologie. Ce concept constitué par quatre dimensions articulées (type de tâches, technique, technologie, théorie). Elle permet d'analyser les démarches possibles justes ou erronées de résolution d'un problème en recherchant la nature des mathématiques convoquées dans la résolution grâce au niveau du bloc technologico-théorique. La TAD (Chevallard, 1999) propose un modèle dans lequel toute activité humaine :

consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T , au moyen d'une technique τ , justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ . En bref, elle part du postulat que toute activité humaine met en œuvre une organisation que Chevallard (1998) note $[T/\tau/\theta/\Theta]$ et qu'il nomme praxéologie, ou organisation praxéologique. $[T/\tau]$ étant la pratique – ou encore le savoir-faire ; $[\theta/\Theta]$ le logos – ou encore le savoir (Chaachoua, p. 83).

Ces outils ont permis de caractériser a priori les types de raisonnements possibles à partir d'exemples prototypiques de résolutions de problèmes de comparaison de type déconnecté (Marchand et Bednarz, 1999, 2000) que nous avons conçus. A posteriori les mêmes outils nous ont servi pour analyser des raisonnements d'élèves.

Ce travail vise d'une part à interroger la pertinence des problèmes de comparaison de type déconnecté dans le développement de la pensée algébrique, et d'autre part de développer des critères pour identifier et caractériser des raisonnements et des procédures d'élèves sur un axe dont les extrêmes sont le raisonnement arithmétique pur et le raisonnement algébrique explicite. Entre les extrêmes de cet axe se situe la zone floue décrite précédemment, zone pour laquelle nous proposons des critères la définissant.

2. Assises théoriques pour les analyses

Bien que nous ne soyons pas dans une ingénierie didactique (Artigue, 1989, 2011), notre démarche d'analyse s'inscrit dans la didactique française de confrontation entre une analyse a priori et une analyse a posteriori. Dans notre cas il s'agit de l'analyse a priori d'un problème de comparaison et de l'analyse a posteriori de productions d'élèves lors de la résolution de ce problème.

L'étude que nous présentons nous a amenés à faire une analyse a priori d'un problème de comparaison déconnecté et nous a montré la nécessité d'avoir des exemples de résolution (exemples prototypiques) pour nos analyses. À ce propos, un problème déconnecté a été conçu. Une première analyse a permis de mettre en évidence les types de relations et la tâche à effectuer. Au regard des différents types de raisonnements (répartis en 10 sous-catégories) mis en évidence dans la grille, nous avons produit des types de technique et avons positionné des éléments relatifs au bloc technologico-théorique. Nous avons ainsi illustré les types de raisonnement en articulant la grille issue des travaux de Squalli *et al.* (2020) et les outils praxéologiques (Chevallard, 1999). Par la suite, nous avons analysé les

³ Les informations plus détaillées peuvent être consultées dans Squalli, Bronner, Larguier et Adihou (2020).

productions des élèves en nous référant à la fois au cadre d'analyse, à la grille (Squalli *et al.*, 2020) et la grille d'analyse des praxéologies avec des exemples prototypiques. Les exemples prototypiques ont été pertinents à double titre. D'une part ils ont permis d'explicitier les raisonnements mis en évidence dans la grille et d'autre part, ils ont servi de référence pour l'analyse des productions des élèves, l'analyse a posteriori.

En mathématiques, l'algèbre, l'analyse et la géométrie utilisent culturellement des registres sémiotiques (Duval, 1991, 2006) comme des représentations graphiques, des dessins géométriques, des expressions algébriques, etc. Cependant, les élèves peuvent également créer des représentations sémiotiques personnelles qui devront évoluer vers les représentations fixées dans le savoir mathématique. Dans le développement de la pensée algébrique, les tâches de traitement et de conversion entre différents registres spontanés ou non sont très importantes. Le langage naturel est à ce titre un registre essentiel pour donner du sens aux raisonnements développés par les élèves. Nous nous inscrivons dans le cadre d'analyse de Squalli *et al.* (2020) pour catégoriser les raisonnements selon deux dimensions : le caractère d'analyticité et la nature des registres sémiotiques. De ce souci de catégorisation trois grandes catégories de raisonnements en ressortent.

- **Les raisonnements de nature non analytique** : Cette catégorie regroupe les raisonnements qui sont caractéristiques d'une démarche arithmétique de résolution. Pour déterminer les valeurs des inconnues, l'élève opère sur des données et des relations connues. À aucun moment il n'opère sur une inconnue ou sur un nombre non déterminé (par exemple, une variable ou un paramètre). Ces raisonnements sont performants dans la résolution des problèmes de type connecté.
- **Les raisonnements analytiques** : Ce sont les raisonnements qui respectent toutes les caractéristiques du raisonnement analytique défini précédemment. Dans ce type de raisonnement, l'élève considère l'inconnue, la représente par un symbole, utilise cette représentation pour exprimer les relations entre les données connues et les autres inconnues du problème et opère sur ces représentations pour former l'équation et trouver les valeurs des inconnues.
- **Les raisonnements à tendance analytique** : Nous incluons dans cette catégorie trois classes de raisonnements. La première regroupe les raisonnements hypothéticodéductifs où l'élève affecte une valeur déterminée à une inconnue sachant qu'elle est fautive, fait comme si cette inconnue possédait cette valeur, opère sur les relations et génère les valeurs des autres inconnues. Il raisonne ensuite sur les relations et les valeurs produites pour trouver la valeur exacte de l'inconnue de départ. Les raisonnements de type fautive position sont un exemple de tels raisonnements. Dans ce type de raisonnement, le sujet fait comme si la valeur de l'inconnue était connue, mais au lieu d'opérer sur une représentation de cette inconnue, il opère sur une valeur fautive mais déterminée. Pour cette raison, nous considérons que ce type de raisonnement est à tendance analytique mais n'est pas analytique. La seconde classe regroupe les raisonnements où l'élève considère les inconnues momentanément

comme des variables. Pour trouver les valeurs de ces variables qui respectent les conditions du problème, il n'opère pas sur elles – comme dans le cas d'un raisonnement analytique – mais sur leurs instanciations numériques. C'est le cas des raisonnements fonctionnels dont on présente un exemple prototypique plus loin. La troisième classe regroupe les raisonnements où l'élève considère l'inconnue, la représente explicitement, utilise cette représentation pour traduire les relations entre les inconnues et les connues mais n'opère pas sur ces représentations pour trouver les valeurs des inconnues. C'est pour cette dernière raison que le degré d'analyticité du raisonnement n'est pas jugé optimal. (Squalli *et al.*, 2020)

Pour chaque grande catégorie de raisonnements, des sous-catégories en lien avec chaque catégorie sont utilisées. Ce sont des types de raisonnements spécifiques qui permettent de trouver des réponses possibles au problème.

Lors de la résolution de problèmes nécessitant de renoncer à une résolution arithmétique pure, les élèves vont devoir considérer un ou plusieurs nombres inconnus et modéliser le problème. Cette modélisation les amène à exprimer le problème par une équation ou par une fonction qui est alors sollicité en tant qu'outil au sens de Douady (1984) même si ces équations ou fonctions sont signifiées dans un registre personnel. Deux cas se présentent alors, soit l'élève parvient à un traitement de ces objets soit il n'y parvient pas. Ces cas apparaissent dans la grille d'analyse des productions des élèves que nous repreneons dans cette étude (voir Annexe).

Cette grille d'analyse représente l'éventail, car cet ensemble de raisonnement ne saurait se réclamer exhaustif, des types de raisonnements possibles pour résoudre un problème déconnecté (« non analytiques », « à tendance analytique », « analytiques »). Des raisonnements spécifiques (A ; B ; C...) sont liés aux types de raisonnements possibles. Le processus qui articule arithmétique/algébrique est un processus qui comprend une rupture. Le domaine algébrique n'étant pas l'aboutissement d'un continuum à partir du domaine arithmétique. Au regard du cadre d'analyse et de ses fondements épistémologiques, historique et mathématiques, complétés par la théorie des registres de représentation sémiotique (Squalli *et al.*, 2020), la grille en annexe détaille les trois grandes catégories de raisonnements et les sous-catégories de raisonnements en lien avec chaque catégorie.

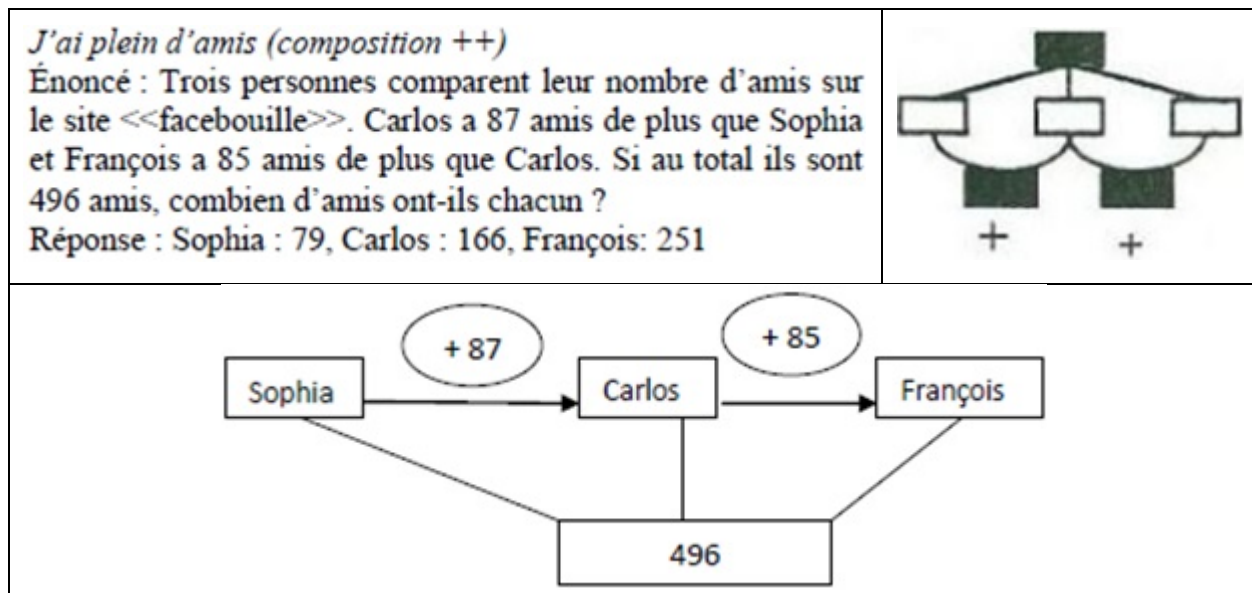
3. Analyse a priori d'un problème de comparaison : des exemples prototypiques

Nous proposons un problème de comparaison (Figure 1) de type composition de deux relations additives (Figure 3). Nous avons créé un exemple prototypique de praxéologie de résolution de ce problème pour chacune des catégories de la grille de Squalli *et al.* (2020). Nous utilisons la praxéologie pour illustrer les deux blocs : le bloc pratique ou savoir-faire (type de tâches et technique) et le bloc théorique ou savoir (technologie et théorie) pour illustrer la grille et les raisonnements. L'analyse a priori consiste à préciser la tâche demandée (résoudre un problème déconnecté). Pour chaque raisonnement de la grille de Squalli *et al.* (2020), nous mettons en évidence une technique de résolution, ensuite nous précisons la technologie qui sous-tend cette technique et enfin la théorie sur laquelle la technologie s'appuie. Ces exemples

prototypiques conçus a priori seront la référence pour analyser les raisonnements des élèves, en d'autres termes, la grille d'analyse des praxéologies.

Figure 3

Schéma du problème de comparaison



- Type A : Arithmétique pure

Technique $85 + 87 = 172$ c'est la somme des deux quantités qui sont en plus
 $496 - 172 = 324$ on enlève ce surplus au total des amis des 3 personnes
Puisque le problème met en évidence 3 personnes, alors, on divise par 3
 $324 \div 3 = 108$
Alors Sophia a 108 amis
Carlos a $108 + 87 = 195$ amis
Et François a $195 + 85 = 280$ amis

Technologie Calcul arithmétique : seules les données présentes explicitement dans le problème et des opérations arithmétiques concernant ces données sont utilisées.

Théorie Arithmétique pure : On n'utilise que les données du problème selon une règle du contrat didactique stipulant qu'on ne doit utiliser que les nombres donnés dans l'énoncé. Seules des connaissances numériques sur les problèmes arithmétiques connectés sont activées.

Remarque concernant la technique : lors de la technique, les relations sont mal interprétées. La relation entre les trois quantités (la somme est égale à 496) est erronée et n'a pas été vérifiée

dans la technique proposée. Dans le cas d'un problème déconnecté, la réponse correspondant à cette catégorie ne peut qu'être fausse ou inachevée.

- Type B : Essais-erreurs sans ajustement

Technique	<p>On suppose que Carlos a 160 amis et on fait « comme si » c'était une réponse au problème.</p> <p>Sophia a $160 - 87 = 73$ amis</p> <p>François a $160 + 85 = 245$ amis</p> <p>$160 + 73 + 245 = 478$ amis ce qui n'est pas assez, il faut trouver 496 amis</p> <p>On suppose que Carlos a 150 amis</p> <p>Sophia a $150 - 87 = 63$ amis</p> <p>François a $150 + 85 = 235$ amis</p> <p>$150 + 63 + 235 = 448$ amis</p> <p>Après plusieurs essais... et un peu de chance...</p> <p>Carlos a 166 amis</p> <p>Sophia a $166 - 87 = 79$ amis</p> <p>François a $166 + 85 = 251$ amis</p> <p>$166 + 79 + 251 = 496$ amis</p> <p>Au total $79 + 166 + 251 = 496$ amis</p>
Technologie	Calcul arithmétique : faire différents essais non guidés, choisir un nombre quelconque, puis un autre, etc. jusqu'à trouver la solution.
Théorie	Arithmétique : l'élève s'autorise à choisir des nombres qui ne sont pas dans l'énoncé et il se ramène à des connaissances arithmétiques.

- Type C : Essais-erreurs avec ajustement

Technique	<p>On suppose que Carlos a 160 amis et on fait « comme si » c'était une réponse au problème.</p> <p>Sophia a $160 - 87 = 73$ amis</p> <p>François a $160 + 85 = 245$ amis</p> <p>$160 + 73 + 245 = 478$ amis ce qui n'est pas assez, il faut trouver 496 amis</p> <p>Le second nombre choisi est donc plus grand que 160, soit 170</p> <p>On suppose que Carlos a 170 amis</p> <p>Sophia a $170 - 87 = 83$ amis</p> <p>François a $170 + 85 = 255$ amis</p> <p>$170 + 83 + 255 = 508$ amis ce qui est trop, il faut trouver 496 amis</p> <p>Le nombre cherché est donc entre 160 et 170. On peut essayer 165...</p>
-----------	---

- | | |
|-------------|--|
| Technologie | Ajustement guidé par la croissance des deux suites de nombres : le nombre choisi et la somme des effectifs des amis. |
| Théorie | Arithmétique enrichie par le concept implicite de variation des fonctions et par le théorème des valeurs intermédiaires. |
- Type D : Essais-erreurs type fausse position

Technique	<p>On choisit une valeur qui est a priori erronée attribuée à Sophia, soit 165 amis, et on fait comme si cette valeur était une réponse en appliquant les relations du problème.</p> <p>Sophia a 165 amis Carlos a $165 + 87 = 252$ amis François a $252 + 85 = 337$ amis Au total $165 + 252 + 337 = 754$ amis</p> <p>On cherche l'écart entre le total généré par la valeur 165 et le total donné par le problème ($754 - 496 = 258$).</p> <p>258 est ce qui est en trop par rapport à 496. Quand on augmente le nombre choisi au départ de 1 unité le total augmente de 3 unités, donc pour savoir de combien il faut diminuer la part de Sophia il faut diviser 258 par 3 :</p> $258 \div 3 = 86$ <p>On rectifie la valeur fausse attribuée à Sophia</p> <p>Alors Sophia a $165 - 86 = 79$ amis Carlos a $79 + 87 = 166$ amis Et François a $166 + 85 = 251$ amis Au total $79 + 166 + 251 = 496$ amis</p>
Technologie	Choisir une valeur a priori fausse et faire des ajustements de type fausse position qui assurent de trouver les bonnes valeurs par une seule étape de calcul. À partir d'un seul essai, l'analyse du tableau de valeurs et la convocation implicite de la variation des fonctions permettent le calcul des nombres cherchés.
Théorie	Arithmétique traditionnelle – Méthode dite de la fausse position et compatibilité de l'égalité avec l'addition.
 - Type E : Essais-erreurs avec raisonnement proportionnel

Technique	<p>On choisit une valeur erronée attribuée à Sophia et on fait comme si cette valeur était une réponse en appliquant les relations du problème.</p> <p>Sophia a 165 amis</p>
-----------	--

Carlos a $165 + 87 = 252$ amis
 François a $252 + 85 = 337$ amis
 Au total $165 + 252 + 337 = 754$ amis

On choisit une autre valeur erronée attribuée à Sophia et on fait comme si cette valeur était une réponse en appliquant les relations du problème.

Sophia a 160 amis
 Carlos a $160 + 87 = 247$ amis
 François a $247 + 85 = 332$ amis
 Au total $160 + 247 + 332 = 739$ amis

On calcule les écarts entre les valeurs attribuées à Sophia ($165 - 160 = 5$) et les valeurs générées par les totaux ($754 - 739 = 15$).

On cherche l'écart entre le total généré par la première valeur 165 et le total donné dans le problème ($754 - 496 = 258$) 258 est ce qui est en trop entre le total généré par la première valeur (165) et le total 496 du problème.

On utilise la relation de proportionnalité sur les écarts. On a :

$$(258 \times 5) \div 15 = 86$$

On rectifie la valeur fautive attribuée à Sophia.

Alors Sophia a $165 - 86 = 79$ amis
 Carlos a $79 + 87 = 166$ amis
 Et François a $166 + 85 = 251$ amis
 Au total $79 + 166 + 251 = 496$ amis

Sophia	165	5	160	?	?
Total	754	15	739	258	496

Multiplie par 3

Technologie

Relation proportionnelle sur les écarts.

Théorie

Arithmétique traditionnelle – Méthode de la double fautive position.

- Type F : Inconnues et/ou équations muettes

Technique	<p>Carlos a le nombre d'amis de Sophia plus 87 amis et à ce nombre d'amis de Carlos on ajoute 85 amis pour avoir ceux de François</p> <p>On a : $87 + 87 + 85 = 259$ amis et $496 - 259 = 237$ amis</p> <p>On divise par 3 ce qui donne $237 \div 3 = 79$ et on trouve le nombre d'amis de Sophia</p> <p>Alors Sophia a 79 amis</p> <p>Carlos a $79 + 87 = 166$ amis</p> <p>Et François a $166 + 85 = 251$ amis</p> <p>Vérification : $79 + 166 + 251 = 496$ amis</p>
Technologie	<p>On convoque implicitement une inconnue (le nombre d'amis de Sophia) et on opère implicitement sur elle (237 c'est trois fois le nombre d'amis de Sophia)</p>
Théorie	<p>Tendance analytique, mais les techniques et les registres mobilisés sont arithmétiques</p>

- Type G : Inconnues ou équations explicites sans opérer sur ces représentations

Technique	<p>Carlos a le nombre d'amis de Sophia plus 87 amis et à ce nombre d'amis de Carlos on ajoute 85 amis pour avoir ceux de François.</p> <p>On a : $87 + 87 + 85 = 259$ amis</p> <p>Au total il y a 496 amis c'est 3 fois le nombre d'amis de Sophia avec en plus 259 amis</p> <p>$496 - 259 = 237$ amis, cela correspond à 3 fois le nombre d'amis de Sophia</p> <p>On divise par 3 ce qui donne $237 \div 3 = 79$ et on trouve le nombre d'amis de Sophia</p> <p>Alors Sophia a 79 amis</p> <p>Carlos a $79 + 87 = 166$ amis</p> <p>Et François a $166 + 85 = 251$ amis</p> <p>Vérification : $79 + 166 + 251 = 496$ amis</p>
Technologie	<p>Au moins une inconnue est signifiée (ici en langage naturel : « c'est 3 fois le nombre d'amis de Sophia »), mais les techniques de calcul sont celles de l'arithmétique.</p>
Théorie	<p>Tendance analytique avec l'indétermination et la dénotation au sens de Radford, mais les techniques de calcul sont arithmétiques.</p>

- Type H : Raisonnement fonctionnel

Technique Le nombre d'amis au total c'est 496, mais c'est aussi 3 fois le nombre d'amis de Sophia plus 259 amis.

Cela permet de renseigner le tableau suivant :

Sophia	20	40	60	80	79
Total	319	379	439	499	496

Technologie Technique fonctionnelle en utilisant implicitement la fonction qui à S fait correspondre $3S + 259$. L'analyse de la table des valeurs numériques permet de trouver la réponse.

Théorie Cadre des fonctions et fonction affine.

D'autres régularités peuvent être établies (exemple : quand on ajoute 20 au nombre, le total augmente de 60). On est dans un processus fonctionnel qui permet de trouver la règle qui met en évidence une fonction affine.

- Type J : Inconnues et équations explicites sans perte de lien avec le contexte

Technique S est la part de Sophia, Carlos a alors $S + 87$ amis, François a $S + 87 + 85$ amis et au total ils ont :

$S + (S + 87) + (S + 87 + 85)$ amis et c'est aussi égal à 496 amis

Si S vaut 60 la formule précédente donne 439

Si S vaut 70 la formule précédente donne 469

Si S vaut 80 la formule précédente donne 499

Si S vaut 79 la formule précédente donne 496

Sophia a 79 amis, Carlos en a 87 de plus soit 166 et François encore 85 de plus que Carlos, soit 251 amis

Technologie Utilisation de la lettre pour signifier l'inconnue et mise en équation pour modéliser le problème, mais sans traitement de l'équation.

Théorie Langage algébrique, mais pas de techniques algébriques de traitement des écritures. L'équation est utilisée en tant qu'outil, mais il n'y a pas de résolution de l'équation en tant qu'objet.

- Type K : Inconnues et équations explicites avec perte de lien avec le contexte

Technique	<p>S est la part de Sophia, Carlos a alors $S + 87$ amis, François a $S + 87 + 85$ amis et au total ils ont :</p> <p>$S + (S + 87) + (S + 87 + 85)$ amis et c'est aussi égal à 496 amis</p> <p>$3S + 259 = 496$</p> <p>$3S = 496 - 259$</p> <p>$3S = 237$</p> <p>$S = 237 \div 3$</p> <p>$S = 79$</p> <p>Alors Sophia a 79 amis</p> <p>Carlos a $79 + 87 = 166$ amis</p> <p>Et François a $166 + 85 = 251$ amis</p> <p>Au total $79 + 166 + 251 = 496$ amis</p>
Technologie	Technique algébrique : utilisation de la lettre pour signifier l'inconnue et mise en équation et résolution d'équations. Inconnues et équations explicites avec perte de lien avec le contexte.
Théorie	Algèbre : l'équation est sollicitée comme outil de résolution et elle est résolue en tant qu'objet de savoir algébrique.

Nous remarquons dans ces exemples que dans la tentative pour produire des exemples prototypiques, lors des résolutions, il y a une tendance à transformer le problème initial en un problème connecté. En fait, la tendance consiste à chercher un générateur (ou à établir un pont entre les relations).

4. Exemples de productions d'élèves et analyse a posteriori

Pour documenter les raisonnements mobilisés par les élèves dans la résolution de problèmes de comparaison de type déconnecté⁴ (Marchand et Bednarz, 1999, 2000), nous en avons proposé en 2013 et 2014 à des élèves québécois de premier cycle du secondaire (secondaire 1 et secondaire 2, 12 à 14 ans), ainsi qu'à des élèves français (5^e, 12 à 13 ans). Nous nous intéressons à des raisonnements de ces élèves qui ont compris le type de problème et qui ont développé une réponse correcte. Nous analysons ces raisonnements en utilisant la démarche d'analyse mise en évidence dans les exemples prototypiques (les types de tâches, les techniques, les technologies et les théories), la grille d'analyse des praxéologies. En utilisant cette grille d'analyse des praxéologies, conçue a priori, nous avons fait une analyse a posteriori en vue de mieux cerner le caractère analytique des raisonnements des élèves. Cette analyse nous a permis de faire ressortir certains objets et certaines représentations sémiotiques.

⁴ Voir une définition dans la section 1.3 et aussi Adihou (2020).

- Type C : Essais-erreurs avec ajustement

Figure 4

Exemple de résolution de type C

Mes Amis(es)

J'ai plein d'amis !

Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site facebook. Carlos a 87 amis de plus que Sophia et François a 85 amis de plus que Carlos. Si au total ils ont 496 amis, combien d'amis ont-ils chacun ?

$$\begin{array}{r} 100 + 87 = 187 \\ 187 + 85 = 272 \\ \hline 559 \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 90 + 87 = 177 \\ 177 + 85 = 262 \\ \hline 529 \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 + 87 = 162 \\ 162 + 85 = 247 \\ \hline 484 \uparrow \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 76 + 87 = 163 \\ 163 + 85 = 248 \\ \hline 487 \uparrow \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 79 + 87 = 166 \\ 166 + 85 = 251 \\ \hline 496 \end{array}$$

Technique Il attribue des valeurs au nombre d'amis de Sophia et fait fonctionner les relations connues et calcule les valeurs des deux autres nombres inconnus. Il additionne les trois valeurs pour trouver le total. Il reprend un exemple pour le nombre d'amis de Sophia quand il voit que le total ne correspond pas à la donnée du problème. Il est guidé par le total, des petites flèches à droite du total donnent le sens de la modification à apporter, et il ajuste en conséquence la valeur attribuée concernant Sophia. Il fait 5 essais et rejette les essais qui ne correspondent pas à la réponse en mettant une croix.

Technologie Ajustement guidé par le nombre total d'amis.

Théorie Arithmétique enrichie par le concept implicite de croissance d'une fonction (au nombre d'amis de Sophia correspond la somme de tous les amis).

- Type D : Essais-erreurs type fausse position

Figure 5

Exemple de résolution de type D

Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site facebook. Carlos a 87 amis de plus que Sophia et François a 85 amis de plus que Carlos. Si au total ils ont 496 amis, combien d'amis ont-ils chacun? et que

Si Sophia a 96 amis ~~donc~~ Carlos en a 87 de plus donc 183 et que François en a 85 de plus que Sophia que Carlos donc 268 et qu'on les additionne ensemble cela fait 547 mais j'en ai trop.

$$\begin{array}{r} 96 \\ +183 \\ +268 \\ \hline 547 \end{array}$$

Alors si Sophia en a 0 donc Carlos 87 et François 172 ensemble ça fait 259. donc si

$$\begin{array}{r} 87 \\ +172 \\ \hline 259 \end{array}$$

Sophia a n'importe quel nombre d'amis on rajoute 259 et cela va donner la réponse

→ verso

donc ~~496~~ réponse

$$\begin{array}{r} 496 \\ -259 \\ \hline 237 \end{array}$$

donc je dois savoir combien à 54 je dois enlever pour avoir 496 en tout

$$\begin{array}{r} 4 \\ 847 \\ -496 \\ \hline 351 \end{array}$$

à chaque fois que j'ajoute un ami ou j'enlève à Sophia il y en aura 3 de plus ou de moins mais ici il m'en faut de moins, donc est-ce que 51 peut être ÷ par 3. oui ça = 17 donc il faut que j'enlève 17 amis à Sophia de mon hypothèse.

réponse : Sophia : 79
Carlos : 166
François : 151

$$\begin{array}{r} 79 \\ +166 \\ +151 \\ \hline 496 \end{array}$$

Technique

L'élève suppose que Sophia possède 96 amis. Il fait fonctionner les relations connues et calcule les valeurs des deux autres nombres inconnus. Il additionne les trois valeurs pour trouver le total 547 (lire 547 et non pas 54 sur l'extrait précédent). De ce total, il soustrait le total réel et trouve qu'il a obtenu 51 de trop. Il comprend que pour corriger l'erreur de la valeur supposée de Sophia (son « hypothèse » de départ), il doit lui soustraire le tiers de 51, soit 17. Il calcule alors la valeur du nombre d'amis de Sophia et en déduit les valeurs des deux autres nombres inconnus.

Technologie

Choisir une valeur a priori fausse et faire des ajustements de type fausse position qui assurent de trouver les bonnes valeurs par une seule étape de calcul. À partir d'un seul essai, l'analyse des valeurs trouvées et la convocation implicite de la variation des fonctions permettent le calcul des nombres recherchés.

Théorie

Arithmétique traditionnelle – Méthode dite de la fausse position.

- Type G : Inconnues ou équations explicites sans opérer sur ces représentations

Figure 6

Exemple de résolution de type G

J'ai plein d'amis!

Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site Facebook. Carlos a 87 amis de plus que Sophia et François a 85 amis de plus que Carlos. Si au total ils ont 496 amis, combien d'amis ont-ils chacun?

Mes Amis(es)

Sophia = x
 Carlos = $x + 87$
 François = $x + 87 + 85$

Solution finale (encadrée) :
 Sophia = 79 amis
 Carlos = 166 amis
 François = 251 amis

Technique L'élève commence par une résolution strictement arithmétique en enlevant la somme $87 + 85$ de 496 . Il trouve 324 qu'il divise par 3 qu'il considère comme le nombre d'amis de Sophia. La vérification du nombre d'amis total montre que la réponse est erronée. Ces calculs sont alors barrés.

L'élève attribue alors à Sophia la lettre x (x amis). Il fait fonctionner les relations connues et génère des expressions qu'il attribue à Carlos = $x + 87$ et François = $x + 87 + 85$. Il fait la somme $87 + 87 + 85$ soit 259 qu'il soustrait à 496 et il trouve 237 . Il divise 237 par trois pour trouver le nombre d'amis de Sophia et en déduit les valeurs des deux autres nombres inconnus.

Technologie Au moins une inconnue est signifiée (ici par une lettre), mais les techniques de calcul sont celles de l'arithmétique.

Théorie Algèbre avec l'indétermination et la dénotation au sens de Radford, mais les techniques de calcul sont arithmétiques.

- Type J - Inconnues et équations explicites sans perte de lien avec le contexte

Figure 7

Exemple de résolution de type J

J'ai plein d'amis!

Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site Facebook. Carlos a 87 amis de plus que Sophia et François a 85 amis de plus que Carlos. Si au total ils ont 496 amis, combien d'amis ont-ils chacun?

Mes Amis(es)

$S = ?$
 $C = S + 87$
 $F = C + 85 \rightarrow S + 172$
 $T = 496$

$$\begin{array}{r} 87 \\ + 85 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 172 \\ + 87 \\ \hline 259 \end{array}$$

$$S + (S + 87) + (S + 172) = 496$$

$$496 - 259 = 237$$

$$\begin{array}{r} 237 \\ - 21 \\ \hline 217 \\ - 27 \\ \hline 190 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 79 \\ + 85 \\ \hline 164 \end{array}$$

$$79 + 172 = 251$$

$$\begin{array}{r} 79 \\ + 160 \\ \hline 239 \\ + 27 \\ \hline 266 \\ + 30 \\ \hline 296 \\ + 30 \\ \hline 326 \\ + 30 \\ \hline 356 \\ + 40 \\ \hline 396 \\ + 40 \\ \hline 436 \\ + 60 \\ \hline 496 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} S = 79 \\ C = 79 + 87 \rightarrow 166 \\ F = 79 + 172 \rightarrow 251 \\ T \end{array}$$

Technique L'élève entame sa résolution comme dans le cas d'une démarche de résolution algébrique conventionnelle. Il traduit les relations dans le problème en représentant les inconnues par la première lettre du nom des personnes et le total par la lettre T. Il exprime les deux autres inconnues en fonction de S, l'inconnue. Il exprime ensuite l'équation modélisant le problème en fonction de l'inconnue S. Il compte le nombre d'occurrences de l'inconnue S (on voit écrit 1, 2 et 3 au-dessus de S) et la valeur totale des deux nombres connus dans l'équation $87 + 172$. Il retranche cette somme 259 à 496 qu'il considère comme étant 3S. Il obtient alors S en divisant 237 par 3.

Technologie Technique algébrique : mise en équation et recherche étayée par un raisonnement arithmétique des solutions. Inconnues et équations explicites sans perte de lien avec le contexte.

Théorie Algèbre qui mobilise des raisonnements arithmétiques fondés sur le sens du problème.

5. Résultats et conclusion

L'analyse des productions des élèves⁵ en nous référant à la fois au cadre d'analyse, à la grille et à la grille d'analyse des praxéologies des exemples prototypiques a permis de mettre en évidence le recours à des équations numériques (EN) et des équations algébriques (EA), l'usage du langage naturel (LN) et du langage algébrique (LA) ainsi que la conversion d'un langage à l'autre. Le recours aux différents langages mis explicitement en évidence dans notre analyse à l'aide de la grille d'analyse des praxéologies aide à cerner le degré d'analyticité dans les raisonnements analysés. L'articulation de la grille d'analyse des raisonnements possibles lors de la résolution de problèmes de partage inéquitable pouvant être utilisés au primaire et au début du secondaire (Squalli *et al.*, 2020) et la TAD qui a permis la modélisation de l'activité mathématique d'un point de vue praxéologique (Tâche, Technique, Technologie, Théorie), s'avèrent pertinentes. Le tableau 2 présente la synthèse des différents critères d'analyse des productions.

Dans la résolution de l'élève qui a mis en évidence le raisonnement de type C, ce dernier utilise des opérations numériques en ligne (ONI) et des opérations posées (ONp). Il fait plusieurs essais pour Sophia en faisant « comme si ». Il met en évidence implicitement un nombre indéterminé, mais n'utilise pas de dénotation pour le signifier et n'opère jamais sur des inconnues. Ainsi relativement à la grille d'analyse des praxéologies l'élève ne met pas en scène un raisonnement de type hypothético-déductif. Mais ce type de raisonnement signe malgré tout une première étape dans le développement de la pensée algébrique en acceptant de s'éloigner de l'énoncé pour tester des nombres qui n'y figurent pas. Ainsi la technique mathématique dite par essais-erreurs apparaît comme étant à travailler comme une première rupture avec les techniques d'arithmétique « pure ».

L'élève qui a mis en évidence le raisonnement de type D, utilise des opérations posées (ONp) et le langage naturel (LN). Dans son travail il explicite précisément son raisonnement dans le langage naturel (LN). Il fait un seul essai à partir d'une « hypothèse », c'est son terme, pour le nombre d'amis de Sophia. Ce nombre est donc pensé à travers son instanciation numérique qui est 96. Ainsi l'élève met en évidence un nombre indéterminé sous la dénomination d'hypothèse. C'est en quelque sorte l'utilisation de la dénotation. L'élève met en scène un raisonnement qui tend vers un raisonnement de type hypothético-déductif (raisonnement à tendance analytique).

⁵ L'ensemble de productions des élèves ont été analysées. Dans ce texte, seulement quelques-unes seront reprises afin d'exemplifier des raisonnements prototypiques.

Tableau 2

Synthèse de l'analyse des productions des élèves

Type	Registre	Traitement ou conversion	Outil	Comme si	Indétermination	Dénotation	Analyticité
C	ONI_ONp	Conversion LN vers EN	Opérations arithmétiques	Plusieurs essais pour Sophia	Oui implicitement	Non	Non
D	ONp_LN	Traitement dans le LN	Opérations arithmétiques	Un seul essai	Oui	Oui	Non (mais une tendance)
G	ONp_LN	Conversion LN vers les EA	Opérations arithmétiques EA sans traitement	3 fois le nombre d'amis de Sophia	Oui	Oui	Non (mais une tendance)
J	ONI_ONp - LA	Conversion LN vers LA (équation)	Équation traitée par des procédures arithmétiques Substitution	Nombres inconnus signifiés par des lettres	Oui	Oui	Oui

Légende : ONI : Opération Numérique en ligne ; ONp : Opération Numérique posée ; LA : Langage Algébrique ; LN : Langage Naturel ; EN : Équation Numérique ; EA : Équation Algébrique

Celui qui a mis en évidence le raisonnement de type G, utilise aussi des opérations posées (ONp) et un langage mixte : le langage naturel (LN) mêlé à du langage algébrique (exemple : « Carlos = $x + 87$ »). Dans son travail il passe du langage naturel (LN) de l'énoncé vers des équations algébriques (EA) dans ce langage mixte en utilisant à la fois la lettre x pour désigner le nombre d'amis de Sophia ainsi que les prénoms des trois amis. Cependant cette modélisation du problème ne sert que de représentation sémiotique, mais l'élève n'opère aucun traitement. Il met en évidence une inconnue x et utilise une dénotation, mais le caractère d'analyticité n'est pas complet. Il semble cependant qu'il y ait des germes d'analyticité dans son raisonnement, car il opère implicitement sur des inconnues. L'élève met en œuvre un raisonnement à tendance analytique.

Dans la résolution de l'élève qui a mis en évidence le raisonnement de type J, l'élève utilise des opérations en ligne (ONI), des opérations posées (ONp) et le langage algébrique (LA). Dans son travail il passe du langage naturel (LN) de l'énoncé au langage algébrique (LA) en posant explicitement une équation qui modélise le problème posé. Cependant il traite ce langage algébrique par des procédures arithmétiques. Le caractère analytique est présent, car l'élève traite l'équation (il trouve implicitement 3S à partir de

l'équation en comptant les occurrences de S), mais il ne parvient pas à faire abstraction du lien avec la situation réelle de l'énoncé, ce qui est encore un caractère important de l'algèbre.

Notre travail montre que les types de problèmes comme ces problèmes déconnectés sont reconnus encore une fois comme étant de très bons candidats pour faire entrer les élèves « avant la lettre » dans le monde algébrique. L'analyse effectuée en articulant la grille issue du cadre d'analyse de Squalli *et al.* (2020), la caractérisation des raisonnements en termes de praxéologie (Chevallard, 1999) et le recours au point de vue de Radford (2014, 2015), sur la pensée algébrique élémentaire, ont permis de faire ressortir différents registres de représentation dans lesquels s'effectuent les traitements lors de la résolution des problèmes de type déconnecté, le type de traitement et les conversions, les outils qui ont permis ces traitements. Ainsi, l'analyse a permis de constater que l'élève fait « comme si » dans certains raisonnements qui ne sont pas algébriques, mais qui montrent une tendance analytique. D'un côté, les critères de Radford (2014, 2015) ont permis d'estimer le degré d'analyticité proposé par le cadre d'analyse de Squalli *et al.* (2020). D'un autre côté, le recours aux éléments praxéologiques de Chevallard (1999), a permis d'appréhender et de mieux cerner les raisonnements grâce à l'analyse qui repose sur les deux blocs : le bloc pratique ou savoir-faire (type de tâches et technique) et le bloc théorique ou savoir (technologie et théorie). L'analyse des productions des élèves en prenant en compte également l'aspect sémiotique au sens des registres de Duval (1991), a montré comment les élèves créent une diversité d'ostensifs avant l'introduction officielle du langage algébrique, certains d'entre eux restant implicites.

Cette recherche basée sur la résolution de problèmes déconnectés montre comment des élèves peuvent vivre la rupture entre une praxéologie arithmétique et une praxéologie algébrique grâce à ce type de problème n'admettant pas de résolution par une technique purement arithmétique. La richesse des productions des élèves montre que des techniques anciennes qui ne sont plus enseignées comme « la fausse position » sont réinventées par des élèves. Par ailleurs, des langages mixtes non conformes au langage algébrique fixé par la culture sont proposés et peuvent être des appuis didactiques pour introduire le langage algébrique officiel. Plus modestement, la reconnaissance d'une procédure par essai-erreur dans la mémoire didactique d'une classe est déjà un premier pas de l'entrée dans le développement de la pensée algébrique.

En ce qui concerne la grille d'analyse des praxéologies a priori ou a posteriori, il est à noter qu'elle a été conçue et enrichie en lien avec l'étude de productions d'élèves de façon dialectique. En effet, notre démarche n'a pas été linéaire. Ces va-et-vient ont permis sans aucun doute de bonifier la grille. Elle permet une description de cette zone floue entre praxéologie typiquement arithmétique et praxéologie typiquement algébrique. Elle montre comment les techniques sont, dans un premier temps, très contraintes par les données du problème (difficulté à utiliser d'autres nombres) et les techniques arithmétiques (les nombres utilisés dans les calculs sont des valeurs numériques). Dans un deuxième temps, des techniques arithmétiques évoluent vers des algorithmes basés sur des savoirs mathématiques le plus souvent implicites et sont cataloguées comme étant à tendance analytique. Dans ce deuxième cas au moins une inconnue est implicitement convoquée dans la technique. Enfin dans les raisonnements analytiques, au moins une inconnue est utilisée avec une dénotation et un traitement concernant cette

inconnue est mis en œuvre. Cependant, une dernière étape est difficile à concevoir pour les élèves, à savoir déconnecter la phase de traitement du système sémiotique proposé par l'élève et le contexte de l'énoncé.

Le recours au concept de praxéologie, original dans cet article, nécessite un examen approfondi des mathématiques embarquées dans une technique de résolution de problème. Ainsi les outils et les registres sollicités pour rédiger une réponse à un problème peuvent être totalement dans le domaine arithmétique (par exemple le type D) et pourtant l'étude du bloc technologico-théorique qui sous-tend la technique peut être caractérisée comme comportant des éléments mobilisés dans une technique algébrique. Ainsi la catégorie D est celle identifiée comme étant à tendance analytique. En conséquence dans cette zone floue nous mettons en évidence une évolution de la technique arithmétique qui mobilise des éléments nécessaires dans une démarche algébrique.

L'originalité de notre travail réside également dans la méthodologie utilisée à savoir concevoir a priori des exemples prototypiques de praxéologies pour illustrer chaque catégorie de la grille de Squalli *et al.* (2020). La confrontation entre ces exemples et des productions réelles d'élèves a créé une dynamique fructueuse pour améliorer dialectiquement la production d'exemples, l'identification des catégories, l'analyse de productions réelles.

Pour conclure, l'apport essentiel de cet article est le caractère opératoire d'une grille d'analyse des praxéologies, complémentaire à celle de Squalli *et al.* (2020) qui répond à la question précédente. Ce travail a permis une meilleure compréhension de la nature de l'algèbre par rapport à l'arithmétique pour ce niveau d'enseignement à l'articulation entre le primaire et le secondaire. Il pose des jalons solides pour une ingénierie didactique qui serait une réponse à la question : quel parcours didactique pour une entrée dans l'algèbre avant la lettre ?

Références

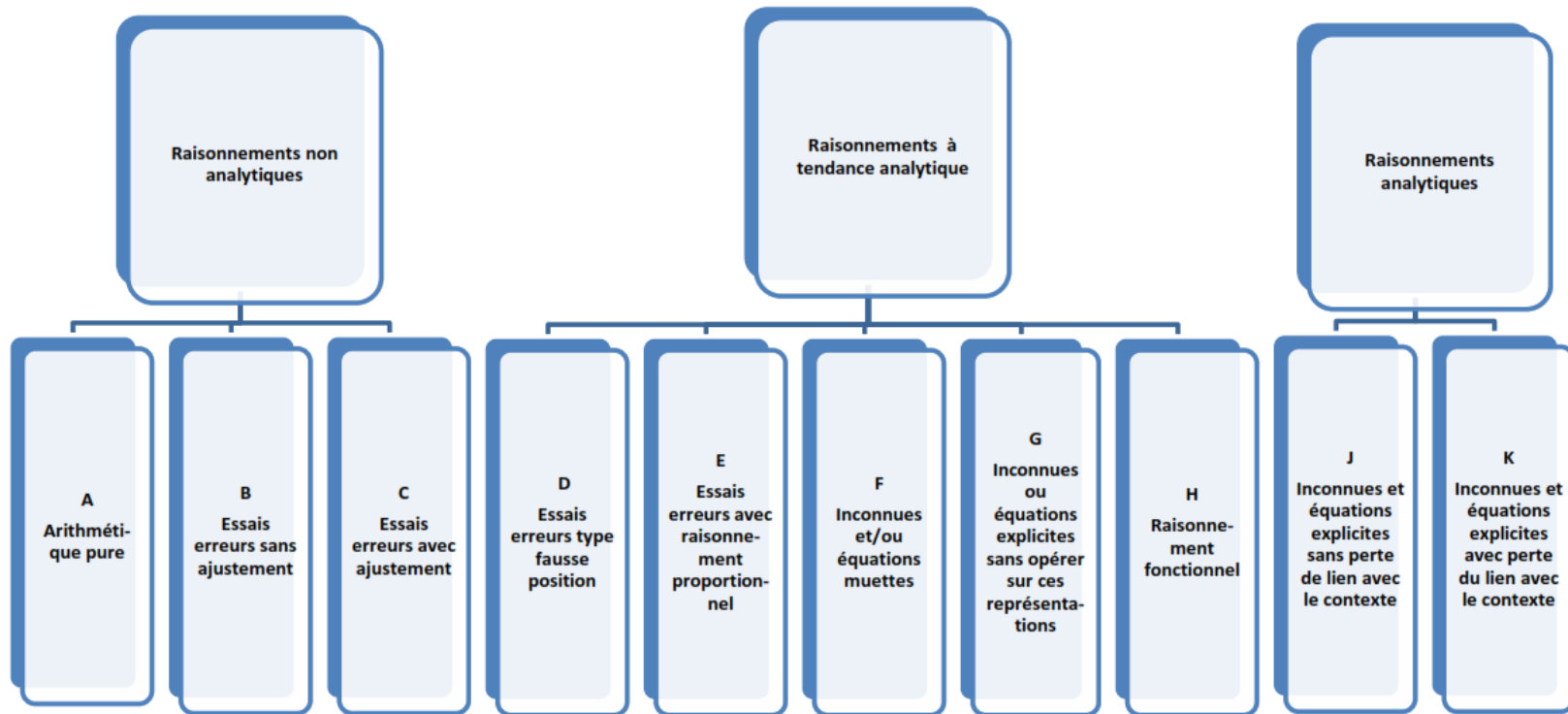
- Adihou, A. (2020). Raisonnements d'élèves en résolution de problèmes de comparaison visant le développement de la pensée algébrique. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 63-98.
- Adihou, A., Squalli H., Saboya M., Tremblay M. et Lapointe A. (2016). Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage - Actes du colloque EMF2015* (p. 206-219).
- Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 281-308.
- Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. Dans C. Margolinas *et al.* (dir.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p. 15-25). Grenoble : La pensée sauvage.
- Bednarz, N. et Dufour-Janvier, B. (1992). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. Dans A. Daife (dir.), *Actes du colloque sur la didactique des mathématiques et la formation des enseignants* (p. 21-40). Maroc : École normale supérieure de Marrakech.

- Bednarz, N. et Dufour-Janvier, B. (1994). The emergence and development of algebra in a problem solving context : A problem analysis. Dans J. P. da Ponte et J. F. Matos (dir.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (vol. II, p. 64-71). Lisbonne : Université de Lisbonne.
- Bednarz, N. et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem solving tool : Continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (p. 115-136). Dordrecht : Springer.
- Bronner, A. (2015). Développement de la pensée algébrique avant la lettre - Apport des problèmes de généralisation et d'une analyse praxéologique. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3* (p. 247-264).
- Câmara, M. et Oliveira, I. (2010). Estratégias e registros utilizados por alunos de 6º ano na resolução de problemas de estrutura algébrica [Stratégies et registres utilisés par les élèves de 6^e année pour résoudre les problèmes de structure algébrique]. Dans *X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador. Brésil.
- Chaachoua, H. (2011). La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Étude de cas : la modélisation des connaissances des élèves. Dans M. Abboud-Blanchard et A. Flückiger (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 81-102). Paris : IREM.
- Chevallard, Y. (1989). *Arithmétique, algèbre, modélisation : Étapes d'une recherche*. IREM d'Aix-Marseille.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Coulange, L. (2000). Étude des pratiques du professeur du double point de vue écologie et économique [thèse de doctorat]. Université Joseph Fourier.
- Coulange, L., Drouhard, J.-P., Dorier, J.-L., et Robert, A. (dir.) (2012). *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives*. Grenoble : La pensée sauvage.
- Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet* [thèse de doctorat]. Université Paris-Diderot.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Duval, R. (1991). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.
- Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Mathematica Educativa, Número Especial*, p. 45-81. Universidad Autónoma del Estado de México.
- Gascón J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'algèbre généralisée. *Petit x*, 37, 43-63.

- Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Ministère de l'Éducation.
- Gouvernement du Québec. (2016). *Progression des apprentissages au secondaire. Mathématique*. Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur.
- Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(2), 167-210.
- Grugeon, B. (2000). Une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire : conception, exploitation et perspectives. Dans *L'algèbre au lycée et au collège, Actes des journées de formation de formateurs*. IREM, Université de Montpellier II.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Dans D. A. Grouws (dir.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 390-419). New-York/Toronto : Macmillan Publishing Company.
- Larguier, M. (2015) Première rencontre avec l'algèbre. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015* (p. 313-333).
- Larguier, M. (2015, juin). *Premiers pas vers l'algèbre au collège*. Communication présentée au colloque scientifique de l'Observatoire international de la pensée algébrique (OIPA). Sherbrooke, Canada.
- Marchand, P. et Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ*, XXXIX(4), 30- 42.
- Marchand, P. et Bednarz, N. (2000). Développement de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes : résolution des élèves. *Bulletin AMQ*, XL(4), 15-24.
- Oliveira, I et Câmara, M. (2011). Problemas de estrutura algébrica : uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec [Problèmes de structure algébrique : une analyse comparative entre les stratégies utilisées au Brésil et au Québec]. Dans *XIII CIAEM-IACME*. Recife, Brésil.
- Oliveira, I. et Rhéaume, S. (2014). Comment s'y prennent-ils? La résolution de problèmes de partage inéquitable par des élèves avant enseignement formel de l'algèbre. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 14(4), 404-423.
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277.
- Radford, L. (2015). Pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3* (p. 334-345).
- Saboya, M., Besançon, V., Martin, F., Adihou, A., Squalli, H. et Tremblay, M. (2014). Résolution de problèmes écrits au moment de l'introduction de l'algèbre : Analyse de productions d'élèves au

- premier cycle du secondaire (1^{re} et 2^e secondaire). Dans *Actes du Colloque du Groupe de didactique des mathématiques 2013* (p. 112-121).
- Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3* (p. 346-356).
- Squalli, H., Bronner, A., Larguier, M., et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 36-62.
- Van Doreen, W., Verschaffel, L. et Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 319-351.
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problem. Dans T. P. Carpenter, J. M. Moser, T. A. Romberg (dir.), *Addition and Subtraction : A Cognitive Perspective* (p. 39-59). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.
- Vergnaud, G. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. Dans *Actes du Colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (p. 259-288). Grenoble : La pensée sauvage.
- Vergnaud, G., Cortes, A. et Favre-Artigue, P. (1988). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. Dans G. Vergnaud, G. Brousseau et M. Hulin (dir.), *Didactique et acquisition des concepts scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres* (p. 259-279). Grenoble : La pensée sauvage.

Annexe. Grille d'analyse des problèmes de comparaison



Source. Squalli, Bronner, Larguier et Adihou (2020)

Chapitre 7

Caractérisation d'interventions d'un enseignant menant une activité de généralisation algébrique au premier cycle du secondaire

Catherine Bilodeau

Université du Québec à Montréal

bilodeau.catherine.6@courrier.uqam.ca

Audrey Bolduc

Université du Québec à Montréal

bolduc.audrey.3@courrier.uqam.ca

Mélanie Tremblay

Université du Québec à Rimouski

melanie_tremblay@uqar.ca

Mireille Saboya

Université du Québec à Montréal

saboya.mireille@uqam.ca

Résumé

L'analyse rapportée ici porte, d'une part, sur la caractérisation d'interventions enseignantes menées lors d'une activité de généralisation algébrique au premier cycle du secondaire et, d'autre part, sur la potentialité d'utilisation du cadre théorique de la théorie de l'objectivation. Lors de la phase d'enseignement de *discussions générales*, trois *modes d'intervention* ont été dégagés à partir de la pratique d'un enseignant : les modes *instigateur* et *accompagnateur* qui s'articulent autour d'une interaction entre l'enseignant et un élève (ou un petit groupe d'élèves) et le mode *expert* qui renvoie plutôt à une interaction entre l'enseignant et la communauté-classe. L'analyse proposée repose principalement sur des concepts clés de la *théorie de l'objectivation* et sur la typologie de la généralisation algébrique proposée par Radford ce qui a permis, entre autres, la distinction de ces trois *modes d'intervention* enseignante.

Mots-clés

Mode d'intervention, Rôle de l'enseignant, Théorie de l'objectivation, Généralisation algébrique

Introduction

Dans le milieu scolaire, de nombreux professionnels en éducation (ex. : enseignants, conseillers pédagogiques et orthopédagogues) ont un souci concernant l'amélioration de la pratique enseignante de l'algèbre. Ils manifestent ainsi le besoin et la volonté d'être accompagnés dans leur pratique lorsqu'ils introduisent la pensée algébrique.

En recherche, l'algèbre est un champ vivant qui préoccupe de nombreux chercheurs. Plusieurs recherches abordent les difficultés liées aux apprentissages et les raisonnements mathématiques en algèbre (Bednarz et Janvier, 1996 ; Carraher, Martinez, et Schliemann, 2007 ; Filloy et Rojano, 1989 ; Kieran 1989, 1990 ; Radford 2003 ; Radford et Puig, 2007). En outre, dans les dernières années, de plus en plus de chercheurs s'intéressent plus spécifiquement aux interventions des enseignants dans différents domaines des mathématiques (Barry, 2009 ; Bartolini Bussi, 1998 ; Bednarz, 2013 ; Corriveau, 2013 ; Hersant, 2004 ; Lenoir et Vanhulle, 2006 ; Radford et Demers, 2004 ; Saboya Mandico, 2010). Combinés, ces deux champs de recherche pourraient possiblement contribuer à répondre au besoin d'accompagnement des professionnels de l'éducation. Toutefois, afin que le milieu de la recherche puisse contribuer à l'amélioration de la pratique enseignante, il convient d'abord, à notre avis, de s'attarder à la caractérisation de cette pratique.

En découle ainsi l'objectif de ce projet, c'est-à-dire explorer les *interventions* d'un enseignant lors de la phase de *discussions générales* pour une situation de généralisation algébrique en première année du premier cycle du secondaire (élèves de 12-13 ans).

1. Outils théoriques et d'analyse

Le cadre théorique de la théorie de l'objectivation (TO) développé par Luis Radford, ainsi que le cadre d'analyse qu'il propose concernant la généralisation algébrique ont été utilisés aux fins d'analyse.

1.1. Théorie de l'objectivation de Radford

Nous ne présenterons pas ici l'intégralité de la vision de Radford, mais seulement quelques concepts-clés qui permettent d'avoir une idée générale du regard adopté pour notre analyse ou qui semblent particulièrement pertinents pour nos données et notre objectif de recherche.

La théorie de l'objectivation part d'une position non mentaliste de la pensée et de l'activité mentale : la pensée est une pratique sociale. Elle est considérée comme *une réflexion médiatisée du monde en accord avec le mode de l'activité des individus*. Comme le précise Radford (2011), cette conception de la pensée repose sur trois éléments interreliés : (1) il y a d'abord l'idée de pensée considérée comme une *réflexion* ; (2) cette réflexion est générée au cours d'une *activité* ; enfin (3) l'activité à travers laquelle la pensée est générée est *médiatisée* à deux niveaux différents : premièrement, elle est médiatisée par le corps, des signes et des artefacts ; deuxièmement, elle est médiatisée par des signifiés culturels. Ces deux niveaux de médiatisation de l'activité laissent leur empreinte sur la forme et le contenu de la pensée elle-même.

Ainsi, selon la théorie de l'objectivation, l'apprentissage, considéré comme activité au sens de Leontiev (1984), renvoie à la production de connaissances mathématiques qui ne peuvent être séparées des contextes sociaux, historiques et culturels dans lesquels le sujet évolue. Plus précisément, l'apprentissage scolaire est conceptualisé en tant que processus de transformation active des objets culturels en objets de conscience (Radford, 2003). De plus, toute action et idée du sujet sont en cohérence avec des façons de penser partagées dans sa société. Radford nous encourage à percevoir la classe en tant que communauté dont l'objet de l'activité est l'expression d'une pensée algébrique dans notre cas. Ainsi, certaines manières de dire et d'agir sont partagées ou mises en œuvre dans cette classe de mathématique, cette communauté. L'enseignant joue un rôle de médiateur pour amener les élèves à généraliser algébriquement comme on l'espère d'élèves du secondaire, c'est-à-dire à objectiver et donc rendre apparents des savoirs culturels (Radford, 2011).

Au cœur de la théorie de l'objectivation se situe le processus d'objectivation, ou plutôt le double processus d'objectivation-subjectivation. D'une part, l'objectivation est le processus par lequel l'élève rend apparent des manières de faire et de penser propres à la culture mathématique. Radford (2010a) nous invite à étudier les moyens sémiotiques qui médiatisent ce processus d'objectivation. D'autre part, l'élève forme son identité, il apprend à se donner une voix dans la culture mathématique (Tremblay, 2015). C'est ce que Radford appelle le processus de subjectivation (Radford, 2011). L'étude de l'intervention enseignante nous conduit à nous intéresser plus particulièrement à la zone proximale de développement (ZPD). Comme définie par Vygotsky (1978), la ZPD renvoie à l'espace entre ce que l'élève peut réaliser sans assistance et les limites de ce qu'il peut réaliser avec de l'aide. Radford (2011) ajoute que la ZPD est constituée par les formes de réflexion, de raisonnement ou de résolution de problèmes qui deviennent accessibles à l'élève (ou à un groupe d'élèves) grâce aux interactions avec l'enseignant ou avec ses pairs.

1.2. Rôle de l'enseignant

Le rôle de l'enseignant peut alors être considéré sous deux aspects (Tremblay, 2015). D'abord, l'enseignant prend conscience du processus de mise en apparence de l'objet-activité par l'élève (le processus d'objectivation). Il s'intéresse alors à la manière dont s'exprime l'apprentissage de l'élève. Il porte une attention particulière (ou non) aux différents moyens sémiotiques qui médiatisent l'activité de l'élève et comment évolue ce processus en termes de passage à l'abstraction. Dans le cadre du contexte étudié, cela signifie pour l'enseignant de situer l'élève dans son processus de généralisation menant à la généralisation algébrique. Du point de vue des chercheurs, il s'agit aussi de porter une attention particulière à ce que semble considérer l'enseignant pour rendre compte du cheminement de chacun de ses élèves.

Ensuite, le deuxième aspect renvoie à la prise de conscience par l'enseignant de la place qu'il joue dans la ZPD de l'élève (ou d'un groupe d'élèves). Dans le cas analysé, il s'agit pour l'enseignant de prendre conscience de ce que l'élève peut faire seul et d'intervenir pour l'exposer à des formes de parler, penser et agir qui l'encourageront à généraliser algébriquement. Le rôle de l'enseignant est donc de contribuer au processus de mise en apparence chez l'élève des manières de penser et d'agir de la culture mathématique. Il est en ce sens un passeur culturel. Il fournit aux élèves des situations et des environnements fertiles dans lesquels les apprenants seront exposés aux objets-activités mathématiques (Radford, 2011). En considérant cela, l'*intervention enseignante* renvoie, selon nous, à une action qui

relève d'un rapport social entre l'enseignant et l'élève (ou un groupe d'élèves) et qui contribue au processus d'objectivation du savoir (activité). Notons que le rôle de l'enseignant s'actualise dans les trois phases d'une leçon en classe décrites par Radford (2011) : travail en petits groupes, échanges entre petits groupes (suite à la première phase, les petits groupes sont invités à échanger entre eux en comparant leurs réalisations) et discussion générale (phase de retour en grand groupe). Dans le cas analysé, seule la troisième phase du déroulement d'une activité, soit la discussion de classe animée par l'enseignant, nous intéresse, car elle permet l'échange d'idées et offre à l'enseignant l'occasion de préciser des informations tout en faisant des liens avec les connaissances recherchées. Ainsi, cette phase permet à l'enseignant d'exercer son rôle par le biais de différents *modes d'intervention*.

1.3. Typologie de la généralisation algébrique

La généralisation algébrique se décline en trois raisonnements généralisés : la généralisation factuelle (GF), la généralisation contextuelle (GC) et la généralisation symbolique (GS) (Radford, 2003, 2010a, 2010b, 2011). Ces généralisations s'expriment par le biais d'expériences vécues par l'élève dont l'étude permet de documenter le processus de prise de conscience de ce dernier. La TO s'intéresse alors à déterminer les moyens sémiotiques d'objectivation dont usent les élèves dans cette prise de conscience d'un processus de généralisation évoluant durant une séance de classe. Plus spécifiquement, la GF renvoie à un raisonnement généralisé opérant sur le numérique et les objets. Radford (2003) précise qu'il s'agit d'une généralisation d'actions sous la forme d'un schème opérationnel qui reste confiné au niveau numérique. À titre d'exemple, Radford (2001) propose la situation suivante (Figure 1) à des élèves, dans laquelle on s'intéresse au nombre de bâtonnets utilisés pour chaque figure.

Figure 1

Exemple de situation de généralisation



Source. Radford (2001, p. 82).

Un élève disant « On fait toujours + 2 pour obtenir la prochaine figure » a dégagé un invariant local à partir de l'observation de certaines figures sans pourtant être en mesure de fournir une expression pour n'importe quel terme d'une séquence, Radford (2010b) nomme ce qui précède généralisation arithmétique. Il est alors nécessaire pour les élèves de voir autrement. Dans un extrait de verbatim que nous traduisons ici, Radford (2010b) illustre ce qu'il nomme « généralisation factuelle » (GF).

Élève 1 : C'est **toujours la suivante**. Regarde! [élève pointe les figures avec son crayon et dit] 1 plus 2, 2 plus 3...

Élève 2 : Alors [en référence à la recherche du nombre de bâtonnets pour la 25^e figure] 25 plus 26... (p. 47)

Radford illustre, par la mise en évidence des termes « c'est toujours la suivante » coordonnée à ce geste de pointage entre les figures que le premier élève est dorénavant sensible à un nouvel invariant qui

s'applique à tous les termes. Radford (2003) dégage ainsi différents moyens sémiotiques qui permettent de reconnaître l'expression de la GF : les déictiques spatiaux, les expressions langagières ayant une fonction générative, les gestes, le rythme et le mouvement. Le recours à des déictiques spatiaux (p.ex. ici, là, celui-ci, celui-là...) tels que le terme « prochain » suggère une façon d'appréhender les figures et ouvre une possibilité pour faire émerger une structure mathématique derrière la suite. Par ailleurs, il est aussi important de noter le recours à l'adverbe « toujours » qui illustre alors la fonction générative de la langue, soit sa capacité à véhiculer le sens de généralité. Un autre moyen sémiotique d'objectivation que relève Radford (2001) est donc le recours aux gestes. Avec un crayon ou avec la main, certains objets du discours sont renforcés afin d'attirer l'attention et ainsi guider la perception. Radford (2003) montre que certains schèmes d'abstraction n'atteignent pas une couche verbale, mais le matériau sémiotique est plutôt fait de rythme et de mouvements. Ils créent une cadence qui permettent de constater l'expression d'une généralisation sans qu'il n'y ait recours à d'autres moyens d'objectivation.

La généralisation contextuelle (GC), quant à elle, comporte encore des références aux particularités des objets du contexte et de leurs caractéristiques en référence à la situation spatio-temporelle. Dans la GC, l'élève montre qu'il perçoit davantage l'objet mathématique plus abstrait qui émerge. L'élève n'utilise pas de lettres ni d'exemples concrets, mais les objets généraux restent contextuels au sens où leur mode de désignation dépend encore des propriétés spatiales. Comme le spécifie Radford (2003), les « arguments » ou « variables » ne sont plus des nombres, mais des objets génériques qui sont désignés par des termes génériques tels que « la figure », « la prochaine figure ». Des verbalisations comme « on fait la figure initiale + la prochaine figure » nous indiquent un niveau de généralisation contextuelle.

La généralisation symbolique (GS) renvoie au recours aux symboles pour exprimer la généralité. L'élève qui est en généralisation symbolique dirait : « On fait $2n + 1$. » On pourrait aussi retrouver dans une formule telle que $n + (n + 1)$ le recours aux parenthèses sans que l'élève ne soit à l'aise de simplifier cette même expression. Il se situerait alors quand même en GS, et la présence des parenthèses serait porteuse de traces du contexte et de l'activité menée : l'expression algébrique « $n + 1$ » serait employée pour représenter la prochaine figure.

1.4. Objectif secondaire de notre recherche

À la lumière de l'explicitation de ces concepts-clés, notre étude permettra de constater le potentiel des outils théoriques et d'analyse issus de la théorie de l'objectivation pour documenter les différentes interventions d'un enseignant dans le contexte de la généralisation en algèbre. Il s'agit ainsi d'un objectif secondaire qui se dégage.

2. Quelques éléments de méthodologie

Les données utilisées dans ce projet de recherche sont secondaires. Elles ont été recueillies dans le cadre d'une recherche-action. Le projet impliquait deux chercheurs ainsi qu'une vingtaine d'enseignants et de conseillers pédagogiques de mathématiques au secondaire. Avant la collecte de données, les participants au projet s'étaient familiarisés avec certaines tâches, avaient analysé des vidéos d'enseignants qui animaient ces tâches et avaient assisté à la présentation de quelques contenus théoriques exposés par les

chercheuses, notamment la typologie de la généralisation de Radford. La collecte de données a eu lieu dans une classe de première année du secondaire (élèves de 12-13 ans). Les données utilisées pour cette analyse sont des enregistrements audio et vidéo d'une séance en classe. Des transcriptions de ces enregistrements ont été effectuées. La tâche utilisée dans cette séance est une adaptation faite par l'enseignant à partir de la *situation des fenêtres* (Section 2.1).

2.1. La situation des fenêtres et analyse a priori

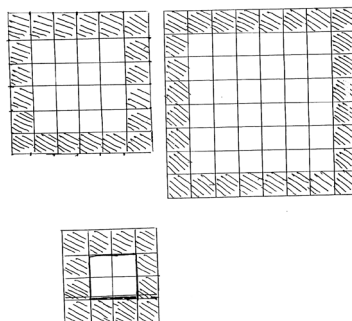
Parmi les tâches travaillées avec les participants au cours de la recherche-action se trouve la *situation des fenêtres* inspirée de celle proposée dans la thèse doctorale de Denis (1997) (Figure 2). Il s'agit d'une version un peu différente d'une situation assez classique (présentée entre autres dans Coulange et Grugeon, 2008) et connue en France notamment sous le nom du *carré bordé*, où elle est proposée à même le programme de formation. Au Québec, cette situation a été reprise en particulier par Nadine Bednarz, dans le cours *MAT2028 – Didactique de l'algèbre* dans le programme du Baccalauréat en enseignement au secondaire à l'UQAM. Quelques modifications ont été apportées : changements dans la mise en contexte, présentations de différents motifs non ordonnés, exigences quant à la forme de la réponse (message en mots).

Cette tâche peut être utilisée avec différentes intentions. Elle est principalement reconnue pour permettre une ouverture vers différents générateurs et différents messages ou formules. Ainsi, si on utilise un langage symbolique et que n représente le nombre de carreaux gris sur un côté de la fenêtre, on pourrait retrouver dans les expressions servant à compter le nombre de carreaux gris « $4(n - 2) + 4$ », « $4n - 4$ » et « $2n + 2(n - 2)$ ». Ces trois expressions sont valides, en ce sens qu'elles permettent effectivement de générer le nombre de carreaux gris à partir des dimensions de la fenêtre. Puisqu'elles sont toutes trois correctes et qu'elles décrivent la même quantité, elles sont équivalentes. Il serait également possible de prendre comme générateur le nombre de carreaux clairs sur un côté ou encore le nombre de carreaux en diagonale. On reconnaît dans ce genre de propos le potentiel de la situation.

Dans le cadre du projet de recherche-action, les participants ont donc été amenés, d'abord, à vivre la situation en adoptant la posture d'élèves. Les chercheuses ont, par la suite, animé un retour réflexif au cours duquel le groupe de participants s'est intéressé aux intentions des questions posées, aux différents raisonnements possibles qui peuvent émerger, aux prolongements potentiels (entre autres le travail sur la résolution d'équations et le travail sur les expressions équivalentes). Des copies d'élèves en lien avec cette situation ont aussi été analysées.

Figure 2*Situation des fenêtres*

Problème : J'ai un ami qui a une petite usine de fabrication de fenêtres. Dans son usine, on fabrique des fenêtres carrées avec des carreaux clairs au centre et des carreaux gris autour. Il a des ouvriers qui s'embêtent à compter un par un le nombre de carreaux clairs et gris qu'il faut pour fabriquer les fenêtres.



Mon ami m'a dit « Pourquoi ne demanderais-tu pas à tes élèves de trouver comment on pourrait faire pour calculer rapidement le nombre de carreaux colorés qu'il faut pour n'importe quelle grandeur de fenêtre? ».

Dans une lettre adressée à l'ouvrier en charge, explique dans tes mots la façon dont il doit s'y prendre pour trouver le nombre de petits carreaux nécessaires à la fabrication d'une fenêtre quelconque. Tu dois trouver une façon de faire qui sera valable pour n'importe quelle grandeur de fenêtre.

Source. Inspirée de Denis (1997, p. 63).

Ainsi, l'enseignant dont nous examinons les interventions était familier avec la situation utilisée, et ses interventions pourraient avoir été posées sous certaines influences théoriques et pratiques en lien avec cette situation particulière, de même qu'avec la généralisation en algèbre, de façon plus globale.

3. Processus d'analyse

Après avoir visionné les vidéos et lu les transcriptions une première fois, nous avons décrit de différentes façons les interventions faites par l'enseignant. Certaines de ces descriptions semblaient caractériser davantage la forme de l'intervention (par exemple : dessin, geste, écrit, question, reformulation) et d'autres se concentraient plutôt sur le contenu, ou sur les intentions qu'on devinait (par exemple demander des explications, donner un exemple, passer à un autre élève). Une première étape d'analyse a donc été faite en encodant les transcriptions à l'aide du logiciel *NVivo* pour identifier les éléments de forme de chacune des interventions faites par l'enseignant. À partir de cet encodage, nous avons identifié trois extraits qui nous semblaient riches et pour lesquels les formes d'interventions prépondérantes n'étaient pas les mêmes.

La troisième étape d'analyse consistait à décrire chacun de ces extraits en prenant soin d'inclure la forme, mais aussi le contenu de l'intervention. En d'autres mots, nous cherchions cette fois à établir des

liens entre les moyens mis en place pour intervenir et les objectifs de l'intervention. Notons que nous sommes très sensibles au fait que nous ne pouvons pas savoir quels sont réellement les objectifs de l'enseignant, mais seulement les inférer en interprétant les données auxquelles nous avons accès.

La quatrième étape de notre analyse était l'utilisation de notre cadre théorique pour éclairer les données. En relisant les descriptions que nous avons rédigées, nous avons cherché à interpréter les événements en utilisant comme lentilles les idées de la ZPD, du rôle de l'enseignant et des trois types de généralisation (GF, GC et GS). Plusieurs relectures ont été réalisées afin de raffiner l'analyse. Cette quatrième étape nous a permis de synthétiser ce qui distinguait nos trois extraits, en plus des différences dans la forme. Nous avons ainsi associé chacun des extraits à un *mode d'intervention* de l'enseignant.

4. Modes d'intervention dégagés

Nous avons choisi d'appeler *modes d'intervention de l'enseignant*, l'ensemble des caractéristiques et des composantes qui définissent les interventions enseignantes à un certain moment, et ce, pendant la phase de *discussions générales*. Le *mode* est adopté temporairement par un enseignant lors de ses interventions menées auprès d'un élève, d'un groupe d'élèves ou de la communauté-classe. Chacun de ces *modes* place en interaction différents acteurs : l'enseignant, la communauté-classe, un élève et/ou un petit groupe d'élèves. Le *mode d'intervention* caractérise l'interaction tout en documentant les moyens utilisés pour favoriser l'objectivation (et la subjectivation) au cours de cette intervention.

L'analyse produite a permis de dégager trois *modes d'intervention* que nous avons nommés : *Instigateur*, *Accompagnateur* et *Expert*. Chacun d'entre eux est illustré et explicité par le biais d'extraits des transcriptions utilisées.

4.1. Le mode d'intervention : Instigateur

Dans ce premier mode, l'enseignant est en interaction avec une élève que nous nommerons Rose. Celle-ci est en avant de la classe. Elle a trouvé une formule pour trouver le nombre de carreaux gris : $((y - 2) \cdot 2) + (y \cdot 2)$ ¹. L'enseignant questionne l'élève quant au sens attribué à la variable qu'elle a choisie par l'élève (« y »). L'interaction entre l'enseignant et l'élève débute par une directive de l'enseignant : « Tu vas m'expliquer ça. » La réponse de l'élève n'est pas claire et ne semble pas satisfaire les attentes de l'enseignant. Par une gestuelle, il fait signe à l'élève d'attendre :

Rose : Bien « y - 2 » (Rose pointe en même temps le « y - 2 » dans son expression), bien c'est un côté de dix parce qu'on ne peut pas compter celui-là... (pointe un carreau du coin de la fenêtre).

Enseignant : Attends un petit peu. Attends un petit peu. Là tu vas vite un peu pour moi. Ton « y » représente quoi ici ?

L'enseignant demande à nouveau des explications, mais en dirigeant cette fois son questionnement sur ce que représente la variable « y ». Il utilise pour ce faire une question ouverte, mais

¹ Il est à noter que Rose a oublié de fermer la première parenthèse de sa formule : $((y - 2) \cdot 2) + (y \cdot 2)$. Ainsi, l'équipe de recherche a modifié sa réponse afin d'assurer une bonne compréhension de l'article.

dirigée : « Ton « y », il représente quoi ici ? ». À nouveau, la réponse fournie par l'élève ne semble pas répondre aux attentes de l'enseignant. Il repose la même question :

Rose : (On n'entend pas bien son explication. Cependant, elle semble mentionner que ça représente un côté de la fenêtre, et avec un peu d'hésitation, elle fait un grand geste circulaire de la main pour nous représenter que dans les faits, le « y » représente chaque côté. On détecte de l'incertitude. Elle regarde sur sa feuille.)

Enseignant : Le « y » représente quoi ? (L'enseignant se tient le menton pour montrer qu'il se questionne avec l'élève).

Rose : Bien ce côté-là (pointe un côté), ce côté-là (pointe un deuxième côté), tous les côtés (en pointant les deux autres côtés).

Enseignant : Tous les côtés ou un côté ? Quand tu dis tous les côtés. Par exemple, dans une fenêtre de 10 par 10, ton « y » serait quoi ?

Rose : (Elle mentionne quelque chose et pointe en même temps deux côtés de la fenêtre.)

Enseignant : Ça serait vingt ?

Rose : (6 secondes de silence. Elle semble très confuse. Elle regarde l'enseignant et après fixe l'image de la fenêtre au tableau).

Dans ces interactions, il est possible que l'enseignant ait l'impression que Rose a atteint, dans ce cas-ci, sa ZPD et ne peut continuer sans l'apport d'autrui. Ceci se manifeste par le fait qu'il soulève, à maintes reprises, la même question et qu'aucune réponse ne lui semble satisfaisante. L'enseignant utilise des questions ouvertes et dirigées pour aider Rose à clarifier la quantité indéterminée représentée par la variable. Ces questions pourraient alors permettre d'établir un lien entre la quantité indéterminée dans le contexte de la fenêtre et la lettre « y » qui lui est associée. Ainsi, l'enseignant permet à Rose de travailler le système sémiotique de significations rattaché au sens de la variable qui a été culturellement élaboré par la classe. La réponse de l'élève porte à confusion. L'enseignant réagit avec une question fermée qui a pour objectif de clarifier les explications de l'élève : « Tous les côtés ou un côté ? ». Pendant que l'élève réfléchit à voix haute, l'enseignant reformule cette demande de clarification en la situant dans l'exemple numérique traité : une fenêtre 10 par 10. Il porte son regard sur la classe et semble vouloir inclure les autres dans la réflexion. Avant même que Rose ne réponde, l'enseignant pose une troisième fois la question : « Ton « y » serait quoi ? ». Cette fois, il semble s'attendre à une réponse numérique comme « 10 » ou « 40 ». Or, la gestuelle de l'élève réfère à deux des côtés de la fenêtre. L'enseignant reformule verbalement cette réponse gestuelle en la rattachant au contexte numérique de l'exemple qui est traité actuellement. Ainsi, il pose la question fermée : « Ça serait vingt ? », un moment de confusion s'ensuit qui débouche vers une explicitation claire de ce que représente « y » dans l'exemple de la fenêtre donnée en exemple :

Enseignant : Quand tu l'as écrit là, ta formule, ton « y » il représentait quoi pour toi ? Benoit, est-ce que tu peux...

Rose : Le premier c'était celui-là (elle pointe la colonne de droite. Elle semble mentionner que le « - 2 » était pour enlever les deux extrémités, les coins, de cette colonne.)

Enseignant : Ok ! Donc, ton « y » représente quoi dans la situation du 10 par 10 ?

Rose : Bien... il représente 10.

En résumé, après avoir constaté des limites pour l'élève en ce qui a trait au passage entre la GS et la GC, l'enseignant interroge Rose en faisant référence aux données numériques du problème initial. Ainsi, il la questionne pour provoquer un retour sur la GF. Or, ses réponses, données sous forme gestuelle, semblent se limiter à la GC. Il y a donc incohérence entre les types de généralisation en jeu. Cette intervention semble permettre de situer Rose dans son processus d'objectivation en ce qui a trait au sens de la variable et aux passages entre les trois types de généralisation. Bien que les questions posées soient adressées à Rose, l'enseignant semble vouloir inclure le reste des élèves par un regard. Alors que Rose est active dans sa réflexion, l'enseignant repère un autre élève, Benoît, et il l'interpelle en le pointant du doigt pour que ce dernier puisse venir en aide à sa coéquipière. Cette intervention permet de favoriser l'échange dans la communauté-classe. C'est finalement Rose qui dit la réponse numérique attendue (« 10 »). Cette réponse est motivée par le recours à deux artefacts, soient le quadrillé représentant la fenêtre ainsi que les dessins réalisés par Rose lorsqu'elle a dû expliquer sa formule. L'enseignant réagit aussitôt avec une expression faciale et des hochements de tête qui valident la réponse fournie de façon hésitante par l'élève. L'enseignant semble reformuler la réponse de Rose en utilisant les mots qu'il souhaitait entendre. Il fait un pas dans la direction du tableau et fait un mouvement de haut en bas qui longe le côté de la fenêtre pour contextualiser le mot « largeur ». On constate que l'enseignant questionne l'élève sur le lien entre le factuel et le symbole « y », pour ensuite fournir lui-même une verbalisation du passage de la GF à la GC. Ainsi, la classe échange sur la quantité indéterminée en passant par les trois types de généralisation et de nombreux médiateurs sémantiques nous indiquent que les élèves sont en processus d'objectivation :

Enseignant : Ok ! Ton « y » représente la largeur (fait un signe de la main à côté de la colonne de gauche, de haut en bas) de ta fenêtre. C'est ça ?

Rose : Oui

Enseignant : Parfait ! Super ! C'est juste pour que je comprenne bien. Alors là, tu as fait « $y - 2$ » x 2.

Rose : C'est parce que « - 2 » parce qu'on ôte ces deux carrés-là. (Elle pointe chacun des carrés.)

Enseignant : OK ! Le « $y - 2$ », est-ce que tout le monde le voit ?

Enseignant : Le « $y - 2$ » c'est... ma fenêtre a bougé un peu on dirait. (L'enseignant va replacer son image dans son portable.) Ok ! Le « $y - 2$ » (pointe les deux coins de la première colonne de gauche en même temps de le dire) c'est les deux rectangles des côtés. Parfait ! Je comprends que tu as fait fois deux, il y en avait deux. Plus...

Rose : Plus, bien, plus « y » parce que c'est 10 (elle pointe la rangée du bas de la fenêtre).

Enseignant : Ok ! « y ».

Rose : Puis là, on a fait fois deux parce qu'on en a deux (elle pointe la rangée du bas et la rangée du haut).

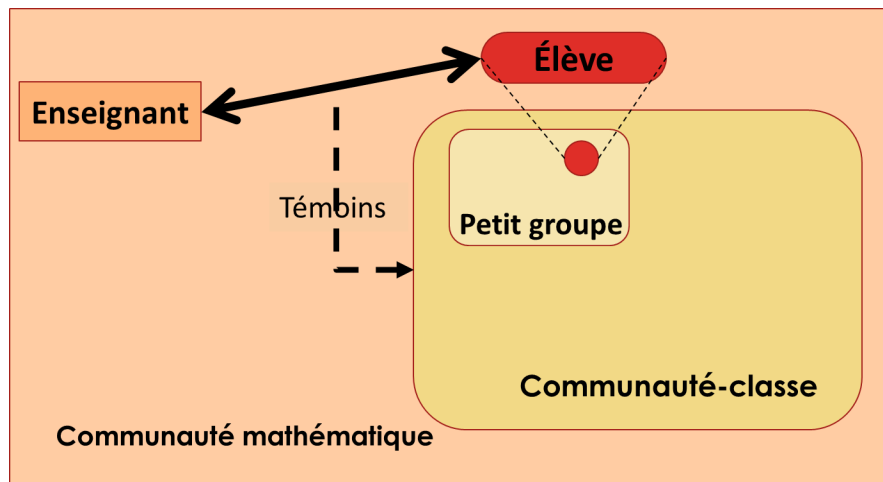
Enseignant : Parfait ! Est-ce qu'il y a quelqu'un qui a trouvé une formule différente ? Ta formule (l'enseignant pointe un élève) est différente. Ok ! Viens nous expliquer ça.

Ainsi, bien que l'élève ait réussi à exprimer sa généralisation algébriquement, on constate combien il demeure difficile d'exprimer à l'aide de mots, les contractions sémiotiques qui furent nécessaires pour tendre vers la formule, laquelle demeure ainsi profondément liée aux actions passées de l'élève. On peut remarquer qu'au début de l'intervention, l'enseignant tente d'amener l'élève, Rose, à verbaliser le lien entre la formule exprimée (GS) et la situation de la fenêtre (GC). L'enseignant encourage l'élève à exprimer la signification à donner à l'expression $(y - 2) \times 2$. Comme ce passage est difficile, l'enseignant questionne davantage, allant jusqu'à utiliser le cas particulier de la fenêtre présentée en exemple au tableau. Il retourne donc au niveau de la GF, pour accompagner ensuite l'élève dans les transitions de la GF à la GC et à la GS. Cet extrait réfère à un moment d'enseignement plus individualisé duquel toute la classe bénéficie étant donné qu'elle en est témoin.

L'analyse de ces extraits nous a conduites à décrire un premier mode d'intervention que nous avons nommé le mode de l'enseignant *instigateur*. Dans ce mode, les principales interactions ont lieu entre l'enseignant et un élève d'un petit groupe (ou un petit groupe d'élèves). Notons que, même si elles s'adressent à un seul élève (ou un petit groupe), les interventions s'avèrent pertinentes pour l'objectivation des autres petits groupes de la classe qui en sont témoins. L'enseignant, quant à lui, est porteur des savoirs normés par la société, la communauté mathématique. Ses interventions sont ainsi enrichies et cela lui permettra de faire cheminer l'élève dans son processus d'objectivation. L'intervention enseignante permet donc d'arrimer le savoir de l'élève à celui du reste de la communauté-classe. La figure 3 représente une schématisation du mode *Instigateur*.

Figure 3

Schématisation du mode d'intervention Instigateur



Plusieurs moyens sont utilisés pour contribuer au cheminement de l'élève :

- des questions ouvertes, dirigées et parfois récurrentes lorsque les obstacles persistent ;
- la reformulation des propos de l'élève pour lui offrir un modèle représentant les normes culturelles des savoirs visés ;
- une gestuelle qui fait référence aux artefacts ;
- un positionnement du corps de l'enseignant qui reflète différents états (à l'écoute, en processus de validation, en réflexion, etc.).

D'ailleurs, les extraits de verbatim illustrent la mise en œuvre de plusieurs de ces moyens mis en place par l'enseignant lorsqu'il adopte temporairement ce mode d'intervention.

4.2. Le mode d'intervention : Accompagnateur

Dans ce deuxième mode, l'enseignant est en interaction avec la classe et deux élèves d'un même petit groupe. Ces deux élèves se situent en avant de la classe, au tableau. Nous nommerons l'un d'eux Olivier. Celui-ci a écrit l'expression suivante pour trouver le nombre de carreaux gris : $(x - 2) \cdot 4 + 4$. La variable « x » représente le nombre de carreaux gris pour un côté de la fenêtre. L'enseignant questionne la classe quant au sens donné à cette expression algébrique fournie par l'élève, Olivier, pour trouver le nombre de carreaux gris au total. L'enseignant peut constater qu'Olivier a produit une GS et les interventions enseignantes permettront de vérifier si ce dernier est en mesure d'explicitier les passages entre GF, GC et GS.

Enseignant : Ok ! Ce qu'il avait dit : je vais prendre seulement (hachure les huit tuiles au centre des deux coins de la fenêtre) les huit tuiles qui sont là. Puis là, tu avais remarqué que les paquets de huit tuiles comme ça, (pointe la rangée du haut de la fenêtre) il y en avait combien ?

Olivier : quatre

Enseignant : Il y en avait quatre. Il y en a un autre paquet de huit ici (hachure un autre paquet de huit tuiles), un autre paquet de huit tuiles ici, un autre paquet de huit tuiles ici. Je vous rappelle que nos coins ne sont pas comptés.

On peut remarquer que, contrairement au premier extrait, l'enseignant s'adresse à toute la classe, et ce, même s'il est engagé dans une discussion avec deux élèves, dans cet extrait-ci avec Olivier uniquement. L'enseignant semble ainsi manifester le souci de voir toute la classe partager des expériences et évoluer en mathématiques ensemble.

L'enseignant a recours à plusieurs gestuelles pour ainsi appuyer l'idée de la « co-construction », notamment lorsque l'enseignant lève les mains et pointe dans les airs en s'exclamant « ok! ». Il capte l'attention de la classe pour clarifier les explications données par la dyade. Subséquemment, l'enseignant change son positionnement : il prend place devant le tableau, faisant dos à la classe, en ayant un crayon à la main pour dessiner sur l'artefact affiché. Cette gestuelle appuie le rôle de médiateur de l'enseignant étant donné qu'il expose la classe à diverses expériences et fournit des moyens supplémentaires pour favoriser le processus d'objectivation.

L'enseignant représente l'expression algébrique « $x - 2$ » en hachurant un « bloc » rectangulaire de huit carreaux clairs sur le côté du haut de la fenêtre. Il double cette intervention par un geste de la main qui délimite le rectangle de huit carreaux. L'enseignant semble illustrer la transition entre GS et GC. Cette double intervention permet de regrouper la classe dans une même communauté, donc dans une réflexion commune.

Olivier : Ça veut dire que ça, c'est (pointe sa formule inscrite au tableau) « $x - 2$ ». « x » c'est le nombre de tuiles par côté.

Enseignant : Ok ! « x » c'est le nombre de tuiles dans un côté. Si j'en enlève deux, j'arrive à huit dans le cas d'un 10 par 10.

Ainsi, suite aux explications d'Olivier, l'enseignant intervient en s'adressant, encore une fois, à toute la classe. Il commence par répéter les propos d'Olivier plus fort et en regardant la classe : « [...] « x » c'est le nombre de tuiles dans un côté. Si j'en enlève deux, j'arrive à huit dans le cas d'un 10 par 10. ». Il est possible de croire qu'à cet instant, l'enseignant veut s'assurer que tout le monde a entendu, et ce, tout en validant les propos d'Olivier. De plus, l'enseignant ajoute des précisions sur la raison d'être de l'opération « $- 2$ » dans l'expression algébrique « $x - 2$ ». Pour ce faire, il a recours au contexte et à une gestuelle qui fait référence au côté de la fenêtre, puis qui mime le retrait des deux carreaux des extrémités.

La suite des explications porte sur la multiplication par 4 dans la formule produite par le petit groupe. L'enseignant pointe le « fois 4 » en questionnant la classe avec une question fermée pour savoir s'ils ont compris la provenance de cette opération : « Est-ce que vous comprenez pourquoi il a fait fois quatre ? ». Plusieurs élèves répondent par l'affirmative « Ouin! ». L'enseignant poursuit tout de même avec des explications.

Enseignant : Est-ce que vous comprenez pourquoi il a fait fois quatre ?

Élève : Ouin !

Enseignant : Quatre blocs de « x » moins deux tuiles. Quatre blocs de huit tuiles dans ce cas-ci.

Olivier : Après ça, plus quatre pour (pointe chaque coin).

Enseignant : Après ça, il est allé avec les coins (hachure les quatre coins de la fenêtre). Magnifique !
[...]

Il utilise une gestuelle et une verbalisation qui établissent un lien entre la formule de l'élève et la représentation de la fenêtre. Il décompose l'expression algébrique : il dit « quatre » en pointant le « 4 » de la multiplication, puis en disant « blocs », il montre le binôme « $x - 2$ » qui représente justement chacun des blocs mentionnés précédemment, et enfin, quand il dit « de $(x - 2)$ tuiles », il balaie de sa main sur la représentation visuelle un de ces blocs qui correspond à un côté de la fenêtre dont on a retiré les deux extrémités. Il enchaîne en se rattachant au contexte de la situation particulière traitée ici, c'est-à-dire la fenêtre d'un côté de 10 carreaux, il reformule : « Quatre blocs de 8 tuiles dans ce cas-ci ».

En bref, dans les derniers extraits, l'enseignant utilise différentes formes d'interventions. Ainsi, il expose la classe à différents médiateurs sémiotiques (gestes, langage verbal, artefacts). Il établit un lien entre des signifiés culturels et des signifiés contextuels. L'enseignant semble ici s'intéresser au passage de la GS (expression algébrique) à la GC (quand il parle de blocs et qu'il fait la gestuelle qui va avec), puis à celui de la GC à la GF (« blocs de huit tuiles dans ce cas-ci »). La densité de contenus mathématiques associés à cette expression algébrique peut motiver l'enseignant à expliciter davantage les transitions entre les concepts mathématiques en fonction de leur type de généralisation. Il semble donc que l'enseignant juge nécessaire d'accompagner la classe dans le passage de la GS proposée par la dyade jusqu'à sa signification dans la situation particulière de la fenêtre 10 x 10 (GF).

L'analyse de ces extraits nous a amenées à synthétiser le tout sous l'appellation du « mode d'intervention *Accompagnateur* ». Comme pour le mode précédent, les principales interactions ont lieu entre l'enseignant et un élève d'un petit groupe ou un petit groupe d'élèves. Dans l'extrait choisi, il s'agit d'un petit groupe. Notons qu'une des distinctions entre les modes *Instigateur* et *Accompagnateur* concerne les actions de l'enseignant vis-à-vis la communauté-classe. En fait, par le biais d'échanges avec les membres du petit groupe, l'enseignant tente ici de comprendre les savoirs qui émergent. L'enseignant accompagne les élèves dans leur prise de parole. Il cherche ainsi à arrimer le savoir de la communauté-classe à celui proposé par le petit groupe. Dans ce cas-ci, les élèves du petit groupe se voient attribuer un statut d'experts et sont dans un processus de subjectivation, c'est-à-dire qu'ils tentent de développer leur voix dans la communauté mathématique. La communauté-classe bénéficie à la fois des interventions de l'enseignant qui lui sont adressées et des échanges qui ont lieu entre l'enseignant et le petit groupe. La figure 4 illustre le mode *Accompagnateur*.

$(x - 2) \cdot 4 + 4$. L'enseignant poursuit avec une question ouverte qui est une reformulation de la question précédente en explicitant davantage ses attentes en ajoutant l'expression « comment ça se peut... ».

Enseignant : [...] J'ai une petite question pour vous. C'est bien beau comme ça, mais est-ce que toutes ces formules-là fonctionnent ?

Élèves de la classe : Ouin !

Enseignant : Bien comment ça se peut que toutes... que trois formules différentes, vraisemblablement à l'œil, elles sont différentes... nous donnent la bonne réponse ?

Nathan : Eeee

Enseignant : Oui !

En même temps qu'il formule sa question, l'enseignant pointe du doigt les trois formules, l'une à la suite de l'autre, marquant la différence entre ces trois artefacts. Il marque aussi la différence entre ces expressions algébriques par son choix de mots pour spécifier qu'elles sont distinctes visuellement : « vraisemblablement, à l'œil, elles sont différentes ». L'enseignant interroge les élèves à savoir s'il est possible, ou plutôt dans ce cas, comment il est possible que « trois formules différentes » permettent d'arriver à la bonne réponse. Il semble attendre de ses élèves une justification qui explique le phénomène mathématique. Au lieu de demander d'expliquer ou de décrire des formules, l'enseignant demande ici aux élèves de justifier le fait qu'elles sont toutes valides. D'un point de vue mathématique, cette question repose sur la définition même de l'équivalence en mathématique : si plusieurs expressions différentes qui représentent la même quantité sont toutes valides, alors elles sont nécessairement équivalentes.

Alors que l'enseignant a demandé une justification de la part des élèves, il obtient plutôt un exemple en arithmétique qui illustre l'équivalence de deux expressions apparemment discordantes :

Nathan : Bien je ne sais pas comment le dire. Bien, en fait des fois avec les additions ça fonctionne bien $2 + 2$ ça fait quatre et $3 + 1$ ça fait quatre aussi.

Enseignant : Ok ! En arithmétique, là,... ici (montre les équations au tableau) on y va algébriquement. Mais dans le domaine arithmétique, ça arrive qu'on a des expressions identiques. Là, il a donné l'exemple $2 + 2 = 3 + 1$. Ça, c'est une expression arithmétique (pointe la partie gauche de l'égalité) qui est équivalente à celle-là. C'est la raison pour laquelle on a placé le symbole qui est ici (pointe le signe d'égalité). Qui signifie, l'expression qui est à gauche est la même que le membre qui est...

Nathan : à droite

Enseignant : ...à droite. Ici, on a des expressions algébriques qui sont identiques, qui sont équivalentes. Pensez-vous qu'il en existe d'autres pour ce problème-là ?

Élèves : Oui sûrement.

Enseignant : Sûrement.

Comme on peut le constater, l'enseignant reprend ensuite cet exemple au tableau en mettant en évidence l'idée d'égalité. Pour ce faire, il produit au tableau l'écrit « $2 + 2 = 3 + 1$ ». Dans son langage verbal, l'enseignant prend la peine de marquer le parallèle entre le domaine de l'algèbre et celui de l'arithmétique, tout en soulignant la distinction entre les deux. Cela se reflète dans l'utilisation d'expressions comme « En arithmétique, là », « algébriquement » et « mais dans le domaine arithmétique ». Cela se perçoit aussi par la gestuelle de l'enseignant qui englobe les trois formules algébriques (artefacts) pour ensuite faire référence à l'écrit qui traduit l'exemple arithmétique. Dans cet échange, l'enseignant bifurque vers un contenu mathématique essentiel à la compréhension de l'équivalence des expressions, c'est-à-dire la signification du symbole d'égalité. Il utilisera à cette fin une gestuelle synchronisée au langage verbal pour assurer la compréhension des élèves à l'égard de l'équivalence des expressions arithmétiques. Par un mime en trois temps, l'enseignant met en évidence la relation d'égalité entre les expressions « $2 + 2$ » et « $3 + 1$ » : d'abord, il dépose sa main sur le membre de gauche de l'égalité (1), puis sur celui de droite (2) tout en soulignant qu'elle est équivalente à la partie gauche, et enfin il entoure le symbole de l'égalité (3) en mentionnant la pertinence de l'utilisation de ce symbole « = ».

Nous sommes d'avis que cet extrait est particulièrement dense en contenus mathématiques. L'enseignant semble, dans ce cas-ci, prendre le rôle d'expert. Dès lors, l'enseignant est le porteur des objets mathématiques développés culturellement par la société. Ce rôle est essentiel à l'apprentissage puisqu'il contribue à exposer l'élève aux normes culturelles reliées aux savoirs mathématiques. D'emblée, le discours soutenu par l'enseignant est déjà normé culturellement. Ainsi, lorsqu'il verbalise et présente aux élèves des artefacts pour supporter sa verbalisation, l'enseignant propose un territoire riche qui favorise l'objectivation. Cette richesse se distingue de celle des territoires précédemment présentés, car les signes et les objets qui y sont proviennent de l'enseignant plutôt que des élèves. Au cours de cette discussion, l'enseignant procède en établissant un parallèle entre l'arithmétique et l'algèbre. De cette façon, il encourage chez les élèves un mouvement dialectique entre un objet en construction et un autre plus avancé dans sa construction, celui de l'égalité en arithmétique. L'enseignant établit ce parallèle de différentes façons, notamment en appuyant ses propos par des références gestuelles aux artefacts affichés au tableau.

Les questions soulevées lors de cette séquence semblent travailler l'équivalence d'expressions algébriques et permettent à l'enseignant de situer la ZPD des apprenants de la classe en ce qui a trait à cette idée. Ainsi, si l'enseignant identifie que certains élèves semblent avoir atteint leur limite, il pourrait tenter de les exposer à différentes expériences, ce qui favoriserait l'avancement de la co-construction de l'objet mathématique par la classe.

Après l'analyse de ce troisième extrait, nous avons choisi de l'associer à un troisième mode d'intervention de l'enseignant : celui d'enseignant *Expert*. Contrairement aux deux autres modes, les interactions principales se produisent ici entre l'enseignant et la totalité de la communauté-classe. Lorsque ce mode est emprunté, la communauté-classe construit collectivement les savoirs mathématiques afin de les arrimer à ceux de la communauté mathématique. En fait, considérant que l'enseignant est porteur du savoir normé, il permet à la communauté-classe de repousser les limites de leur ZPD. Chaque élève pourra

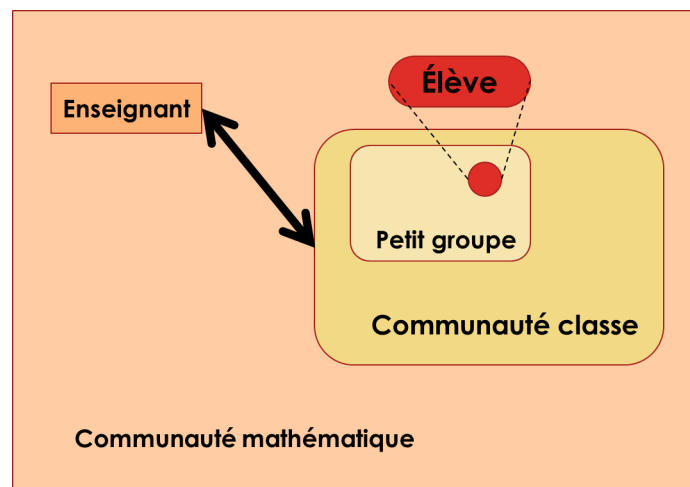
ainsi cheminer vers l'arrimage de ses savoirs à ceux qui sont historiquement et culturellement constitués. Ce mode est également marqué par la densité et la richesse du discours mathématique employé par l'enseignant. La figure 5 illustre le mode *Expert*.

Dans le mode *Expert*, l'enseignant utilise les moyens suivants pour tenter de faire le pont entre le savoir de la communauté-classe et celui de la communauté mathématique :

- s'appuyer sur les connaissances antérieures de la communauté-classe pour établir des liens mathématiques entre les savoirs impliqués et ceux historiquement et culturellement constitués ;
- plusieurs allers-retours explicatifs entre différents concepts mathématiques, dont certains sont nouveaux tandis que d'autres non ;
- des exemples évocateurs pour la communauté-classe ;
- des questions ouvertes posées à la communauté-classe qui incitent la justification ;
- une gestuelle pour illustrer les propos de l'enseignant ;
- une gestuelle qui prend comme appui les dessins de l'enseignant.

Figure 5

Schématisation du mode d'intervention Expert



5. Discussion autour des modes d'intervention dégagés

Après avoir présenté de façon globale chacun des trois *modes d'intervention* mis en œuvre par cet enseignant, nous jugeons pertinent de les mettre en parallèle afin de bien voir ce qui les distingue ou ce qu'ils peuvent avoir en commun. Le tableau 1 présente une synthèse des trois *modes* en explicitant les caractéristiques de l'intervention enseignante pour chacun d'entre eux selon quatre angles : les modalités employées, le but perçu de l'intervention de l'enseignant, le processus d'objectivation et le processus de subjectivation. Mentionnons que ces trois cas sont particuliers aux interactions analysées.

On peut remarquer dans les modes d'*Instigateur* et d'*Accompagnateur*, l'importance des questions posées par l'enseignant. Celui-ci est ouvert aux différents messages émis par les élèves, il fait en sorte que les élèves explicitent leur formule et ne restreignent l'activité à une seule formule. On

retrouve dans ces façons de faire les prescriptions émises par Mason (1996). En effet, celui-ci prône qu'il faut accompagner les situations de généralisation comme celle des fenêtres par la mise en œuvre d'une approche pédagogique qui favorise une démarche personnelle des élèves afin qu'ils visualisent les figures en jeu.

Il souligne que ce genre d'approche pédagogique nécessite une attention particulière de l'intervenant : une décentration de sa part de ses propres façons de voir (aboutissant à une certaine généralisation et construction de formules, mais en excluant éventuellement d'autres). Cette approche permet de contrer les difficultés recensées autour de la généralisation comme le repérage d'un pattern dans une figure ou une suite de figures qui ne se fait pas de façon immédiate, comme le processus de symbolisation et de généralisation qui est vu comme difficile pour les élèves, une autre difficulté étant l'utilisation par les élèves d'un raisonnement proportionnel non adéquat (Bednarz et Janvier, 1996 ; Lee, 1996 ; Orton et Orton, 1999).

Ainsi, le travail présenté ici a permis de constater qu'il existe plusieurs *modes d'intervention enseignante* durant la phase de discussions générales. Le recours à la théorie de l'objectivation nous a permis de fines analyses qui nous ont conduites à ne pas nous intéresser uniquement aux formules dégagées par les élèves et à leur signification, lesquelles sont souvent considérées comme une finalité pour toute activité de généralisation algébrique. Nous nous sommes plutôt intéressées aux processus d'objectivation/subjectivation d'élèves et plus spécifiquement aux manières de faire de l'enseignant qui est lui-même sensible aux différentes phases de généralisation et qui cherche, par ses questions et interventions, à faire cheminer ses élèves. Ainsi, cette communication a permis d'identifier trois modes d'intervention, mais l'analyse d'autres séances (avec d'autres enseignants, d'autres tâches ou avec d'autres élèves) permettrait de dégager d'autres *modes d'intervention* et d'autres caractéristiques correspondant aux modes déjà exposés. Éventuellement, un travail plus approfondi permettrait de parler plus exhaustivement de *l'intervention enseignante* dans un contexte de généralisation en algèbre et peut-être même d'outiller davantage les chercheurs lorsque ceux-ci sont sollicités, par le milieu enseignant, à des fins d'accompagnement.

Tableau 1*Synthèse des modes d'intervention dégagés*

Modes d'intervention	Instigateur	Accompagnateur	Expert
Modalités	Questionne à répétition (questions ouvertes et fermées)	Demande à l'élève ou au petit groupe d'explicitier	Présente des savoirs normés à la communauté-classe (à partir de ce que les élèves savent)
	Reformule les propos des élèves	Reformule les propos des élèves	Émet ses propos
	Interagit avec un élève ou un petit groupe (devant la communauté-classe)	Interagit avec le petit-groupe et la communauté-classe pour faire le pont	Interagit avec la communauté-classe
But	Tente de faire cheminer l'élève dans son objectivation	Accompagne le petit groupe dans leurs verbalisations qui s'adressent à la communauté-classe	Mouvement dialectique entre l'objet mathématique en construction et un objet plus avancé dans sa construction
En terme du processus d'objectivation	Par le questionnement, l'enseignant tente de faire en sorte que l'élève rende apparent le savoir	L'enseignant reconnaît l'expertise de l'élève (ou du petit groupe) qui partage sa mise en apparence du savoir	C'est l'enseignant qui se donne le rôle de porteur de la mise en apparence
En terme du processus de subjectivation	On est davantage axé sur l'objet-activité et sa mise en apparence, mais l'élève se subjective tout de même par la simple expression de ses idées au groupe	L'intervention de l'enseignant est axée sur la subjectivation (prise de parole) de ces « élèves-experts »	L'enseignant prend en charge les deux pôles : l'objectivation et la subjectivation

Références

- Barry, S. (2009). *Analyse des ressources mises à contribution par enseignant et chercheur dans l'élaboration de scénarios d'enseignement en dénombrement visant le développement de la modélisation en secondaire I* [thèse de doctorat]. Université du Québec à Montréal, Montréal, Québec.
- Bartolini Bussi, M. G. (1998). Verbal interaction in the mathematics classroom : A Vygotskian analysis. *Language and communication in the mathematics classroom*, X, 65-84.
- Bednarz, N. et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem solving tool : Continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (p. 115-136). Dordrecht : Springer.
- Bednarz, N. (dir.) (2013). *Recherche collaborative et pratique enseignante : regarder ensemble autrement*. Paris : Éditions L'Harmattan.
- Carraher, D. W., Martinez, M. V. et Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, 40(1), 3-22.
- Corriveau, C. (2013). *Des manières de faire des mathématiques comme enseignants abordées dans une perspective ethnométhodologique pour explorer la transition secondaire collégial* [thèse de doctorat]. Université du Québec à Montréal, Montréal, Québec.
- Coulange, L. et B. Grugeon. (2008). Pratiques enseignantes et transmissions de situations d'enseignement en algèbre. *Petit x*, 78, 5-23.
- Denis, C. (1997). *Une introduction à l'algèbre en secondaire 3 généralisation et construction de formules* [mémoire de maîtrise]. Université du Québec à Montréal, Montréal, Québec.
- Filloy, E. et Rojano, T. (1989). Solving equations : The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.
- Hersant, M. (2004). Caractérisation d'une pratique d'enseignement, le cours dialogué. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 4(2), 241-258.
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra : A structural perspective. Dans S. Wagner et C. Kieran (dir.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (vol. 4, p. 33-56). Erlbaum ; National Council of Teachers of Mathematics.
- Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. ICMI study series. *Mathematics and Cognition : The International Group for the Psychology of Mathematics Education*, X, 96-112.
- Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (p. 87-106). Dordrecht : Springer.
- Lenoir, Y. et Vanhulle, S. (2006). Étudier la pratique enseignante dans sa complexité : une exigence pour la recherche et la formation à l'enseignement ». Dans A. Hasni, Y. Lenoir et J. Lebeaume (dir.), *La*

formation à l'enseignement des sciences et des technologies au secondaire dans le contexte des réformes par compétences (p. 193-245). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Leontiev, A. N. (1984). *Activité, conscience, personnalité*. Moscou : Éditions du Progrès.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to Algebra* (p. 65-86). Dordrecht : Springer.

Orton, A. et Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. Dans A. Orton (dir.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (p. 104-120). Londres : Cassell.

Radford, L. (2001). Factual, Contextual and symbolic generalizations in algebra. *PME Conference*, 4, 4-81.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs : A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

Radford, L. et Demers, S. (2004). *Communication et apprentissage. Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques*. Centre franco-ontarien des ressources pédagogiques.

Radford, L. et Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 145-164.

Radford, L. (2008). *Theories in Mathematics Education : A Brief Inquiry into their Conceptual Differences*. Article de travail préparé pour le ICMI Survey Team 7 : The notion and role of theory in mathematics education research.

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.

Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : La théorie de l'objectivation. *Éléments*, 1, 1-27.

Saboya Mandico, M. (2010). Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire [thèse de doctorat]. Université du Québec à Montréal, Montréal, Québec.

Tremblay, M. (2015, mai). *Analyse d'une situation de généralisation algébrique vécue dans une classe de 1^{re} secondaire sous l'angle de la théorie de l'objectivation*. Communication présentée à l'Observatoire international de la pensée algébrique (OIPA, 2015), Sherbrooke, Canada.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society : the development of higher mental processes*. Cambridge : Harvard University Press.

Chapitre 8

Le raisonnement covariationnel comme précurseur au concept de fonction : une caractérisation des situations à caractère covariationnel présentes dans une collection de manuels scolaires du Québec destinée aux élèves de 12-14 ans

Stéphane Fontaine

Université du Québec à Montréal

fontaine.stephane.4@courrier.uqam.ca

Mireille Saboya

Université du Québec à Montréal

saboya.mireille@uqam.ca

Mélanie Tremblay

Université du Québec à Rimouski, campus Lévis

melanie_tremblay@uqar.ca

Résumé

L'apprentissage et l'enseignement du concept de fonction occupent une place importante au deuxième cycle du secondaire (élèves de 14 à 17 ans). Toutefois, ce concept pose de nombreux défis aux élèves. Dans notre étude, nous nous intéressons au travail préalable qui peut être fait en amont de l'enseignement formel du concept de fonction. Ce travail préalable prend la forme de propositions de situations à caractère covariationnel présentes dans une collection de manuels du Québec, *Perspective mathématique*, destinée à des élèves de 12 à 14 ans. Une fois les situations à caractère covariationnel identifiées dans ce manuel, nous avons cherché à les caractériser afin de dégager la variété des situations proposées. En effet, pour mieux saisir le raisonnement covariationnel, les élèves doivent être confrontés à différents types de situations où ce raisonnement peut s'exprimer de diverses façons. L'analyse révèle la présence significative de cinq variables didactiques qui caractérisent les situations ayant un potentiel pour le développement du raisonnement covariationnel dans ce manuel. Il s'agit d'une étude de la covariation qui prend place autour de 1) la présence de trois grandeurs ou plus dans certaines situations, 2) l'absence de valeurs numériques menant à une interprétation qualitative de la covariation, 3) l'omniprésence de la grandeur temps comme grandeur indépendante qui mène vers une étude de la covariation particulière, 4) la présence de grandeurs interchangeable dans certaines situations qui permet de mettre l'emphase sur l'importance de la dépendance et de l'indépendance des grandeurs pour la lecture de la covariation et 5) une détermination dans la situation de la relation entre les grandeurs ce qui empêche une réflexion sur la dépendance des grandeurs.

Mots clés

Fonction, covariation, correspondance, manuels scolaires, enseignement secondaire, grandeurs concomitantes

1. Problématique

1.1. Importance et complexité du concept de fonction

De nombreuses recherches en didactique des mathématiques se sont intéressées à l'apprentissage et à l'enseignement du concept de fonction (Carlson, 1998 ; Confrey et Smith, 1995 ; Hitt, 2003 ; Hitt, Gonzalez et Morasse, 2008 ; Passaro, 2007, 2015 ; René De Cotret, 1988 ; Sajka, 2003 ; Sierpiska, 1992 ; Thompson et Carlson, 2017). Passaro (2015) relève la place importante qu'occupe ce concept pour les élèves, étudiants et même, pour le futur citoyen : « L'apprentissage de la notion de fonction est effectivement considéré nécessaire dans la formation du citoyen en général » (p. 3). Toutefois, même si les chercheurs s'entendent pour dire que les fonctions sont incontournables dans l'enseignement des mathématiques, leur apprentissage est également complexe pour les élèves et les étudiants¹ : « Most mathematicians and teachers of secondary and entry level college mathematics would probably agree that functions play an important role in a student's mathematical education. It turns out that comprehension of the function concept is remarkably complex. » (Selden et Selden, 1992, p. 1). Sajka (2003) va dans le même sens, elle souligne la richesse du concept de fonction en raison de la multitude de ses interprétations et de ses représentations². Elle indique que même si de nombreuses recherches ont été consacrées à l'étude didactique de ce concept, celui-ci reste néanmoins difficile pour les élèves. Mais quelles sont ces difficultés? Plusieurs recherches (Carlson, 1998, 2002 ; Carlson, Larsen et Jacobs, 2001 ; Confrey et Smith, 1995 ; Janvier, 1981, 1998 ; René de Cotret, 1988 ; Sajka, 2003 ; Saldanha et Thompson, 1998 ; Thompson et Carlson, 2017) recensent diverses difficultés chez les élèves du secondaire et des étudiants du post-secondaire. Elles soulignent des difficultés d'interprétation de phénomènes de variation dynamique, des difficultés avec les notions de variable et de dépendance, la tendance à linéariser (relier les points dans le graphique sans réfléchir à ce qui se passe entre ces points) ainsi qu'une vision des relations comme étant statiques. D'autres recherches se sont intéressées à mettre en place des ingénieries didactiques (Hitt, Gonzalez et Morasse, 2008 ; Passaro, 2015), d'autres à analyser les ressources mises à la disposition des enseignants, comme les manuels scolaires (Landry, 2016 ; Robert, 2018) et une autre recherche (Dufour, 2011) s'attarde aux pratiques des enseignants. Nous pouvons trouver également un recueil (Janvier et Pelletier, 2003) qui propose diverses situations visant un travail sur la covariation. En effet, plusieurs chercheurs (Ellis, 2007 ; Passaro, 2007 ; van den Heuvel-Panhuizen, Kolovou et Robitzsch, 2013) préconisent un travail précoce sur la covariation pour aider les élèves à appréhender le concept de fonction. La plupart des recherches citées prennent place au 2e cycle du secondaire (auprès d'élèves âgés de 15 ans et plus). Peu de recherches s'inscrivent au premier cycle du secondaire (élèves de 12 à 14 ans en 1^{re} et 2^e secondaire). C'est ce cycle qui nous intéresse. Notre démarche s'inscrit dans un désir de faciliter le « saut » que les élèves vivent entre le premier et le deuxième cycle du secondaire ; tel que le rapportent

¹ Les « élèves » désignent ceux qui suivent le cursus du préscolaire jusqu'au secondaire et les « étudiants » désignent ceux qui poursuivent au post secondaire (collégial et/ou universitaire).

² Les fonctions peuvent être appréhendées comme un ensemble de paires de points ordonnés, d'autres fois elles sont vues comme une correspondance entre deux ensembles, elles peuvent également être reliées à un graphique, associées à une formule, elles peuvent être l'expression d'un processus ou d'un objet et bien d'autres interprétations possibles.

des enseignants impliqués dans un projet de formation continue³. À cet effet, ils ont observé que le taux de réussite chute entre ces deux cycles. Ce « saut » correspond à un passage entre un apprentissage axé sur l'étude de situations de proportionnalité où l'on mise davantage sur la recherche d'une valeur manquante suite à l'établissement d'une proportion et sur la modélisation de problèmes où il y aura résolution d'équations du premier degré à des apprentissages (introduction de la fonction du 1^{er} degré et de la fonction inversement proportionnelle) qui reposent cette fois-ci sur l'usage de lettres en tant que variables au deuxième cycle. Ainsi, la question qui nous anime est d'étudier si les manuels scolaires du premier cycle du secondaire au Québec mis à la disposition des enseignants proposent des situations à caractère covariationnel et si oui, comment elles se caractérisent⁴. Pour que les élèves saisissent le concept de covariation, celui-ci doit prendre place dans une diversité de situations. Dans le mémoire de maîtrise du premier auteur, trois collections de manuels scolaires sont analysées. Comme le précise Antoun (2012), plusieurs chercheurs, un peu partout dans le monde, considèrent les manuels comme un « outil de première importance pour les enseignants » (p. 30). Barallobres (2009) constate l'importance de l'analyse des manuels scolaires :

L'analyse des manuels scolaires – en tant qu'éléments intermédiaires entre les prescriptions ministérielles et les pratiques d'enseignement - est un outil important pour la compréhension des phénomènes qui sont à l'œuvre dans la détermination des savoirs enseignés (Assude et Margolinas, 2005, p. 1).

Nous rapportons dans ce texte l'analyse de la collection *Perspective mathématique* dont les situations proposées nous semblent intéressantes pour mener une étude autour de la covariation.

1.2. Les deux regards de la fonction : correspondance et covariation

Confrey et Smith (1995) soulignent qu'il existe deux regards distincts mais complémentaires de la fonction, le regard correspondance et le regard covariationnel. Le premier regard est relié à une idée de correspondance entre des valeurs et est souvent associé à des définitions ensemblistes tandis que le deuxième regard repose sur les composantes de variation et de dépendance. C'est le regard covariation qui nous intéresse dans ce texte. Passaro (2015) précise : « [Le raisonnement covariationnel] est associé au lien entre le changement de la grandeur indépendante et le changement de la grandeur qui lui correspond, il permet donc d'étudier les variations concomitantes de ces deux grandeurs » (p. 21). Ce regard est important à développer chez les élèves. En effet, René De Cotret (1988) rapporte qu'un regard uniquement porté sur la correspondance ne suffit pas pour bien saisir le concept de fonction :

³ Projet de formation continue qui s'intitule « Co-construction, mise à l'essai, analyse et partage de situations didactiques visant à favoriser le développement de la pensée algébrique » sous la responsabilité de M. Tremblay (UQAR) et M. Saboya (UQAM) de 2013 à 2017.

⁴ Notre intérêt est de mieux cerner ce qui est déjà proposé dans les manuels pour favoriser le raisonnement covariationnel pour ainsi être mieux outillés pour collaborer avec les enseignantes et enseignants du premier cycle de manière à ce qu'ils puissent exploiter davantage les situations proposées soit en les conservant telles qu'elles sont formulées actuellement, ou encore, en modifiant leur formulation pour atteindre les objectifs didactiques visés.

Nous croyons que certains concepts qui ont été exprimés par la fonction sont mieux adaptés que d'autres à l'enseignement car ils en permettent une approche plus intuitive et plus pratique. Ils permettent de "voir", par l'expérience, des phénomènes impliquant des fonctions. En fait, il s'agit de redonner à la fonction ses composantes de variation, dépendance et correspondance. La fonction, il y a à peine 100 ans, renfermait ces concepts, mais avec les mathématiques ensemblistes elle s'est départie des aspects variation et dépendance. (p. 2)

Comme cette chercheuse, Sierpinska (1992) et Soury-Lavergne et Bessot (2012) soulignent que le regard correspondance s'est imposé dans le milieu de l'enseignement au détriment du regard covariationnel. Le regard correspondance amène vers une vision plus statique de la fonction alors que le regard covariationnel adopte une vision dynamique, intuitive et pratique de la fonction. Pour exemplifier les regards correspondance et covariation, appuyons-nous sur une situation tirée d'un manuel scolaire du Québec destiné à des élèves de 12 à 14 ans (Figure 1).

Figure 1

Situation de la bougie

8. Pendant une panne de courant, on allume une bougie de 20 cm pour s'éclairer. On remarque qu'elle fond à un rythme de 1,5 cm/h.

a) Complète la table de valeurs ci-dessous.

Panne de courant							
Nombre d'heures écoulées depuis que la bougie est allumée	0	1	2	3	7	9	12
Longueur de la bougie (cm)							

b) Donne la règle qui permet de calculer la longueur l de la bougie selon le nombre n d'heures écoulées depuis que la bougie est allumée.

c) Combien de temps pourra-t-on s'éclairer avec cette bougie?

Source. Cadieux, Gendron et Ledoux (2005, p. 14).

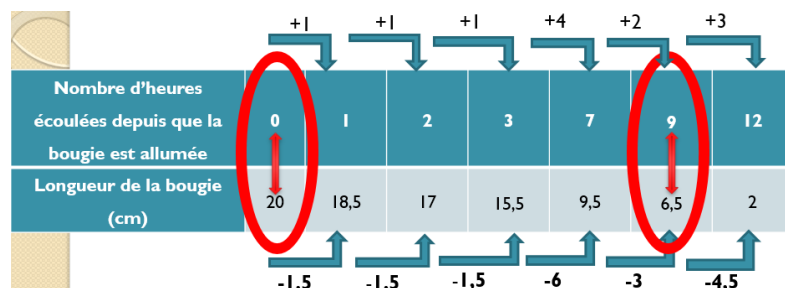
Dans cette situation, on observe la fonte d'une bougie « à un rythme de 1,5 cm/h ». Ce faisant, les grandeurs⁵ impliquées (et imposées par la tâche) sont la longueur de la bougie et le nombre d'heures écoulées depuis que la bougie est allumée. La relation observée entre les deux grandeurs peut s'exprimer comme suit : la longueur de la bougie diminue au fur et à mesure que le temps augmente. En supposant que le rythme de fonte est constant, il est possible de remplir la table de valeurs proposée dans la question a) de la situation. On peut noter ici un passage d'un contexte en mots vers la table de valeurs. La question

⁵ Dans notre travail, nous utiliserons le mot *grandeur* au lieu de *variable*. Nous parlerons également en termes de *grandeurs prédominante* et *conséquente* au lieu d'*indépendante* et *dépendante* qui sont des termes plus adaptés au niveau auquel on s'intéresse.

b) demande de trouver la règle qui illustre la situation et la question c) requiert une interprétation de la table de valeurs pour un cas de figure précis. La figure 2 présente la manière dont les regards correspondance et covariationnel peuvent s'exprimer dans la table de valeurs.

Figure 2

Étude de la table de valeurs tirée de la situation de la bougie



Source. Cadieux, Gendron et Ledoux (2005, p. 14).

Le regard correspondance se déploie par l'observation de valeurs associées aux longueurs de la bougie en un temps écoulé spécifique, fixé. Par exemple : Au moment d'allumer la bougie, sa longueur initiale est de 20 cm, 9 heures après l'allumage de la bougie, sa longueur est de 6,5 cm et il serait possible d'observer les autres couples de valeurs selon le même regard en s'intéressant à la relation entre les deux valeurs des différents couples. On lit ainsi les données à la verticale (voir les flèches rouges, figure 2). Le regard covariationnel s'intéresse plutôt aux écarts entre les différents couples de valeurs et au lien entre ces écarts. L'information donnée sur la bougie qui fond à un rythme que l'on considère comme constant de 1,5 cm/h permet de remplir la table de valeurs. En observant les variations concomitantes des deux grandeurs, il est possible d'obtenir les différents écarts (représentés par les flèches horizontales dans la figure 2) qui correspondent aux réductions de la bougie associées à un temps écoulé. Ainsi, on peut voir dans la table de valeurs qu'au bout de la première heure d'allumage de la bougie, la bougie a fondu de 1,5 cm. Comme ce rythme est constant, après une autre heure écoulée, la bougie a fondu encore de 1,5 cm.

Visant l'analyse d'une collection de manuels scolaires autour de la covariation, nous avons orienté notre regard plus spécifiquement sur les chapitres de la collection qui travaillent sur des concepts connexes à l'étude des préalables au concept de fonction. Un de nos objectifs est de repérer les situations qui s'appuient sur un questionnement qui amène vers une étude de covariation.

1.3. Les concepts associés à la covariation au premier cycle du secondaire

Le terme « fonction » n'apparaît pas au programme du premier cycle du secondaire du Québec (Gouvernement du Québec, 2006), mais nous y retrouvons des concepts qui y sont rattachés :

Pour construire sa pensée algébrique, l'élève observe des *régularités* issues de situations diverses et représentées de différentes façons, comme des *dessins*, des *tables de valeurs* et des *graphiques*. Pour introduire les idées de *variable*, de *dépendance* entre des variables et de *généralisation à l'aide d'une règle*, l'utilisation de *suites de nombres* constitue un moyen privilégié. Par exemple, on peut utiliser les nombres polygonaux ou différentes situations géométriques pour généraliser à l'aide d'une ou de plusieurs règles équivalentes. [c'est nous qui soulignons] (p. 254)

Ainsi, d'après le programme de formation de l'école québécoise (PFEQ), c'est au premier cycle du secondaire qu'apparaissent explicitement les concepts de variable, de dépendance, de régularité, qui sont introduits dans des situations de généralisation à des fins de construction de formules en s'appuyant sur différents registres de représentation (tables de valeurs, graphiques, descriptions verbales). D'autres parties du programme, par exemple la section sur le raisonnement proportionnel, ciblent également des aspects reliés au concept de fonction :

De plus, il [l'élève] déploie un raisonnement proportionnel lorsqu'il observe *qu'une quantité ou une grandeur est liée à une autre par un rapport déterminé*. Il fait usage de ce type de raisonnement pour calculer un *quotient*, un *taux* (pente, vitesse, débit, etc.) ou un indice, pour effectuer des opérations sur des suites de nombres ou en comparer des éléments [c'est nous qui soulignons] (Gouvernement du Québec, 2006, p. 243).

Donc, sans la présence explicite du terme « fonction », il est prévu que les élèves soient initiés au premier cycle du secondaire au concept de fonction lors de l'apprentissage du raisonnement proportionnel et de l'algèbre. Ainsi, grâce à ces concepts, il est possible pour l'élève d'adopter une approche covariationnelle qui, comme l'indique Passaro (2015), se veut une : « manière de travailler la fonction » (p. 37).

2. Repères théoriques pour l'analyse de situations déployant un raisonnement covariationnel

Comme le précise Passaro (2015), l'approche covariationnelle s'appuie sur « l'étude des variations concomitantes de deux grandeurs via l'analyse des accroissements concomitants de ces deux grandeurs [ce qui] pourrait contribuer au développement d'une compréhension approfondie de la notion de fonction » (p. 37). Mais quels sont les indices qui vont nous permettre de décréter qu'une situation permet le développement du regard covariationnel?

2.1. Les unités de raisonnement dans le déploiement d'un raisonnement covariationnel

Les travaux de Carlson (1998, 2002), Carlson *et al.* (2001) s'intéressent à la covariation ainsi qu'à la compréhension du concept de fonction par différents étudiants inscrits aux cours de calcul différentiel et intégral. À travers ses recherches auprès d'élèves du secondaire et d'étudiants au post-secondaire, Carlson

a établi une liste de cinq actions mentales⁶ du raisonnement covariationnel. Passaro (2015) s'appuie sur le travail mené par Carlson (2002) et définit treize unités de raisonnement covariationnel⁷ qui sont rattachées à ces actions mentales (Figure 3). Les explicitations de ces unités de raisonnement nous ont permis de déceler des éléments à observer dans l'analyse d'une situation pour ainsi juger de son potentiel pour le développement d'un raisonnement covariationnel. Pour le travail au premier cycle du secondaire, nous nous intéressons aux trois premières actions mentales nommées AM1, AM2 et AM3 et donc aux sept premières unités de raisonnement associées à ces actions mentales, identifiées par U1 jusqu'à U7. Les actions mentales AM4 et AM5 avec leurs unités de raisonnement de U8 à U13 s'intéressent à la quantification des accroissements pour arriver à déterminer une règle de la fonction, ce qui est un travail ultérieur à celui que nous visons. Les premières unités de raisonnement soulignent l'importance pour approcher le raisonnement covariationnel de s'attarder aux grandeurs et à la relation qui les lie.

Figure 3

Cadre sur les unités de raisonnement dégagées à priori⁸

Cadre de Carlson		Notre cadre	
Action mentale	Description de l'action mentale	Unité	Description de l'unité de raisonnement
AM1	Coordonner la valeur d'une variable avec les changements de l'autre variable	U1	Identifier la grandeur indépendante et la grandeur dépendante
		U2	Identifier la présence de variations concomitantes de deux grandeurs
AM2	Coordonner la direction du changement d'une variable avec le changement de l'autre variable	U3	Qualifier le changement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente
AM3	Coordonner la « quantité » de changement d'une variable avec le changement de l'autre variable	U4	Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante
		U5	Déterminer les différentes phases de variation (une phase est un intervalle de la grandeur indépendante sur lequel la « façon de varier » de la grandeur dépendante est la même)
		U6	Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de plus en plus petits de la grandeur indépendante
		U7	Interpréter le changement des accroissements en termes de taux de variation et nommer la grandeur associée selon le contexte (vitesse, débit etc.)

Source. Figure tirée de Passaro (2015, p. A-111 et A-112) et qui s'appuie sur les actions mentales de Carlson (2002).

⁶ Pour Carlson, le raisonnement covariationnel est développemental. Elle y associe 5 actions mentales qui correspondent à des niveaux de développement du raisonnement covariationnel.

⁷ Passaro (2015) les définit comme suit : « Nous appelons unités de raisonnement, les composantes du raisonnement covariationnel qui s'articulent en situation » (p. 80).

⁸ Pour en savoir plus sur les unités de raisonnement et d'avoir accès à une description fine de celles-ci, il est possible de se référer à la description des unités « à posteriori » qui se trouve à l'annexe 13 de la thèse doctorale de Passaro (2015).

Passaro (2015) associe des questions pour les unités de raisonnement. La première question porte sur les trois premières unités de raisonnement, de U1 à U3 et cible un raisonnement qualifié de global : « Comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente? » (p. 91). Cette question implique une réflexion sur l'identification des grandeurs, sur la relation de prédominance ainsi que sur l'effet de l'augmentation de la grandeur prédominante sur la grandeur conséquente. La deuxième question est, quant à elle, qualifiée de local qualitatif : « Comment se comportent les accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont constants ? » (p. 92). Elle englobe les 4 unités de raisonnements, de U4 à U7, ces unités relèvent les observations des accroissements de la grandeur conséquente pour des intervalles de la grandeur prédominante d'abord constants puis de plus en plus petits. L'objectif de ces unités est de décrire qualitativement les variations entre les grandeurs de plus en plus finement.

Afin de sélectionner les situations du manuel scolaire *Perspective mathématique* qui présentent une approche covariationnelle, nous nous appuyons sur les questions suivantes : « Est-ce que l'une des grandeurs dépend de l'autre? C'est-à-dire si une des grandeurs varie, est-ce que la deuxième grandeur varie de façon concomitante? Plus précisément pour des variations constantes de la grandeur indépendante, peut-on déterminer comment la grandeur dépendante varie? ». Ainsi, une fois ces situations répertoriées, nous allons chercher à les caractériser afin de brosser un portrait des situations qui permettent un travail sur la covariation au premier cycle du secondaire dans le manuel *Perspective mathématique*. Pour analyser la variété de ces situations, nous avons eu recours à 18 variables didactiques⁹. Nous en retenons pour *Perspective mathématique* cinq d'entre elles qui sont significatives.

2.2. Les variables didactiques (VD) retenues pour le manuel *Perspective mathématique*

Passaro (2015) précise que : « l'analyse des situations sollicitant un travail sur la covariation dans des recherches antérieures a permis la mise en évidence de certaines caractéristiques. Nous considérons que ces éléments peuvent constituer des variables didactiques influençant le raisonnement déployé par les élèves » (p. 103). L'une des variables didactiques relevées par Passaro est le type de grandeurs, selon l'auteure : « quatre types de grandeurs sont fréquemment utilisées : longueur/distance, volume, temps et vitesse » (p. 102). Dans notre travail, plusieurs variables didactiques⁹ portent une attention particulière sur les grandeurs en jeu, à la fois pour déterminer le type des grandeurs, le nombre de grandeurs, mais également la relation entre ces grandeurs. Dans cet article, nous avons ciblé les variables didactiques suivantes : la présence de trois grandeurs ou plus (VD1), l'absence de valeurs numériques (VD2), des situations dont la grandeur prédominante est le temps (VD7). En ce qui a trait à la relation entre les grandeurs, nous avons répertorié des situations dont la relation entre les grandeurs est déterminée (VD8) et certaines dont les grandeurs sont interchangeables (VD9).

⁹ Une variable didactique est définie comme « une variable, pouvant être modifiée par l'enseignant, et dont les modifications (même légères) peuvent infléchir sensiblement le comportement des élèves et provoquer des procédures ou des types de réponses différentes. C'est en jouant sur des choix adéquats de ces variables que l'on peut provoquer de nouveaux apprentissages, en visant à faire émerger chez les élèves de nouvelles connaissances comme des outils nécessaires pour résoudre un problème. En fait, la notion de variable didactique traduit la nécessité de distinguer, classer et modéliser les situations dans une perspective didactique » (Brousseau, 2003, p. 197).

2.2.1. Présence de 3 grandeurs ou plus (VD1)

Cette variable didactique relève la présence de 3 grandeurs ou plus dans une situation à caractère covariationnel, ce qui ouvre la porte à une réflexion sur le choix entre deux grandeurs parmi ces trois pour en étudier la variation. Janvier et Pelletier (2003) soulignent que cette réflexion sur les grandeurs à fixer avant l'observation des deux grandeurs qui varient aide les élèves à cerner le concept de paramètre d'une fonction, concept mobilisé au deuxième cycle du secondaire. Si la situation énonce d'emblée les deux grandeurs à observer, le questionnement concernant le choix de ces grandeurs parmi d'autres grandeurs est escamoté :

La majorité des manuels scolaires ne mentionnent que deux grandeurs dans les problèmes qu'ils présentent. [...] Dans la vie de tous les jours, rares sont les situations où il n'y a que deux grandeurs à considérer. Il y a toujours de multiples facteurs à considérer et les négliger serait une grave erreur [...] De plus, il arrive que ces autres grandeurs interviennent lorsqu'on tente de représenter formellement une situation. Il ne faut donc pas s'étonner de les voir apparaître dans nos calculs. (p. 7)

Si nous reprenons l'exemple de la situation de la bougie (Figure 1), nous pouvons observer que les deux grandeurs sont déterminées par la présence d'une table de valeurs : le *Temps écoulé depuis l'allumage de la bougie* et la *Longueur de la bougie*. Il serait intéressant de considérer d'autres grandeurs comme la chaleur produite par la bougie, le diamètre de la bougie, la force du vent ou d'autres caractéristiques observables qui elles seront fixées pour pouvoir étudier la variation entre les deux grandeurs prédéterminées. Ces grandeurs qui seront fixées deviendront des paramètres. Dans l'analyse du manuel *Perspective mathématique*, nous avons porté une attention particulière à la présence d'au moins trois grandeurs dans une situation à caractère covariationnel. Il est intéressant de constater que lorsque la relation entre les grandeurs est déterminée (VD9), les grandeurs qui varient le sont aussi.

2.2.2. Absence de valeurs numériques (VD2)

Ici sont considérées les situations à caractère covariationnel qui n'ont pas recours à des valeurs numériques pour les grandeurs en jeu. L'élève peut alors avoir recours à un questionnement qualitatif entre les deux grandeurs. En effet, comme le précise Saboya (2003) dans ce type de situations :

Pour cela, il [l'élève] doit contrôler les données de la situation les unes par rapport aux autres, les comparer entre elles pour ensuite aller les placer dans le plan cartésien en prenant en compte de plus les grandeurs données sur les deux axes. Pour représenter les données, il doit avoir recours à tout un vocabulaire de comparaison comme « plus, moins,... » (p. 38).

Il y a ainsi la mise en place d'un vocabulaire relié aux grandeurs concomitantes. Les élèves sont amenés à faire une lecture globale du graphique ou, dans le cas d'une modélisation, à procéder à une anticipation globale de la relation menant à la construction d'un graphique. De plus, Janvier (1981) et Carlson (2002) soulignent la difficulté des élèves à utiliser un langage axant sur une variation, sur une comparaison relative, sur une interprétation qualitative du graphique marquée par l'emploi des mots «

plus », « moins », « beaucoup », dans des phrases du type « ça monte plus vite que... ». Les élèves ont donc de la difficulté à lire un graphique pour lequel il n'y a pas de graduations, de nombres sur les axes. En effet, une réflexion sur les intervalles des grandeurs sans pouvoir se référer à ses valeurs est complexe.

2.2.3. La grandeur prédominante est le temps (VD7)

Dans notre analyse, nous relevons si le temps est une grandeur de la situation (VD6) puis, si elle est la grandeur prédominante ou conséquente (VD7). À la suite d'une analyse historique du concept de fonction, Passaro (2015) relève l'importance du temps dans l'étude des fonctions : « Nous retenons, en premier lieu, qu'en ce qui concerne la construction des notions de fonction et de dérivée, le temps apparaît à la fois un allié et un obstacle. » L'auteure évoque l'importance du temps écoulé dans l'étude des relations afin d'analyser les variations sous un angle dynamique. Elle indique aussi que Sierpinksa (1992) considère comme un obstacle épistémologique l'omniprésence du temps comme grandeur sur laquelle on s'appuie. Ce même constat a été fait par Janvier (1998) qui souligne que la grandeur *temps* est une des grandeurs les plus présentes dans les situations à caractère covariationnel et qu'elle est presque toujours la grandeur prédominante. Dans ce cas, l'interprétation repose sur l'explicitation de la situation comme une histoire (appelée chronicité), il s'agit d'un temps écoulé. Lorsque le « temps » est la grandeur conséquente, l'interprétation repose plutôt sur l'observation de la durée d'un événement spécifique ou d'une expérience. Par exemple, dans la situation du vol Paris-Montréal, la grandeur, distance entre Montréal et Paris, est fixée. Il s'agit d'exprimer graphiquement la relation entre la vitesse de l'avion en vol et la durée du vol. Janvier (1998) souligne que plusieurs difficultés surgissent lors de la modélisation de cette situation : certains élèves produisent des tracés qui représentent un seul vol, considérant le temps comme une chronique alors que c'est une interprétation du temps comme durée qui est requise dans cette situation, différents vols doivent ainsi être considérés. De plus, Janvier et Pelletier (2003) précisent que la tendance à s'exprimer en fonction du temps comme une continuité est présente chez les élèves même quand cette grandeur n'est pas l'une de celles qui est sollicitée dans l'étude de la situation. Par exemple, dans une situation qui propose d'étudier les grandeurs *volume de l'eau* dans un contenant et *hauteur de l'eau* dans ce contenant, les élèves s'expriment souvent en utilisant des expressions comme : « *au début, après, longtemps, pendant un certain temps, rapidement, de plus en plus vite, rapidement, lentement, ensuite, ...* » (p. 23) qui font référence au temps écoulé.

2.2.4. La relation entre les grandeurs n'est pas déterminée (VD8)

La VD8 révèle si la situation permet de choisir les grandeurs prédominante et conséquente. Lorsque la relation entre les grandeurs est déterminée, le questionnement ne pourra se faire sur le choix de la relation entre les deux grandeurs. Dans ce cas, l'élève n'a pas de « choix », il peut simplement reconnaître la grandeur prédominante préétablie pour décrire la situation. On peut remarquer que les situations comportant des tables de valeurs ou des graphiques déterminent d'emblée le sens de la relation en raison des conventions de ces registres. Pour les situations comportant des descriptions verbales, nous pouvons observer les formulations pour décider si la VD8 est présente. Par exemple, la situation de la bougie indique : « la longueur l de la bougie selon le nombre n d'heures écoulées », la relation entre les deux grandeurs est donc déterminée, en plus cette situation s'appuie sur une table de valeurs. Si les auteurs

avaient utilisé une formulation du type : « observe la longueur de la bougie et le nombre d'heures écoulées » et qu'il n'y avait pas de table de valeurs, nous aurions considéré que la relation n'est pas déterminée. Le fait que la relation ne soit pas déterminée est intéressant pour le développement du raisonnement covariationnel puisque l'élève est poussé à exprimer la variation entre les deux grandeurs.

2.2.5. Les grandeurs sont interchangeables (VD9)

La VD9 révèle la possibilité dans la situation d'interchanger les deux grandeurs à l'étude. Cette VD est liée à la VD8 parce qu'une situation qui présente une relation entre les grandeurs qui est imposée n'ouvre pas la porte à se questionner sur la possibilité d'interchanger les deux grandeurs. Comme pour la VD8, cette VD est intéressante car elle permet à l'élève de se concentrer sur le lien de dépendance entre les deux grandeurs. Nous avons relevé, dans notre étude, les situations dont les grandeurs peuvent être interchangées « naturellement », même si les tâches et le questionnement ne dirigent pas l'élève dans cette direction. À titre d'exemple, si on considère une situation où on s'intéresse au remplissage d'une bouteille (grandeurs étudiées : volume de l'eau et hauteur de l'eau), on peut « naturellement » étudier le volume selon la hauteur ou la hauteur selon le volume. La situation de la bougie (voir figure 1) permet difficilement (du moins pas de façon évidente) de concevoir la fonte de la bougie comme grandeur prédominante et le temps comme grandeur conséquente. Passaro (2015) relève : « il semble que, de prime abord, la perception des variations concomitantes de deux grandeurs n'implique pas forcément la distinction d'une grandeur indépendante et d'une grandeur dépendante » (p. 34).

3. Méthodologie

Le choix d'une méthode de recherche qualitative s'avère pertinent pour notre étude puisque nous souhaitons dégager les situations des manuels du 1^{er} cycle du secondaire qui ont du potentiel pour développer un raisonnement covariationnel ainsi que pour décrire les caractéristiques de ces situations. Les enseignants utilisent ou, ont la possibilité d'utiliser différents manuels scolaires pour enseigner le concept de fonction au premier cycle du secondaire (12 à 14 ans). Les trois collections ciblées dans notre étude proviennent de la première collection issue de la réforme au Québec de 2003 et ont été approuvés par le ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. Les variables didactiques sont nos catégories qui permettront une analyse de contenu telle que définie par Bardin (2013) :

[L'analyse de contenu est] un ensemble de techniques d'analyse des communications. Il ne s'agit pas d'un instrument mais d'un éventail d'outils ; ou plus précisément d'un même outil mais marqué par une grande disparité dans les formes et adaptable à un champ d'application très étendu : les communications. (p. 35)

Comme l'indique l'auteure, cet ensemble de techniques s'applique aux communications au sens large. Dans cette perspective, un livre par exemple devient une communication écrite disponible à un large public. Ainsi nous considérons les manuels scolaires comme une forme de communication écrite et disponible pour les enseignants et les élèves du premier cycle du secondaire, cette forme de communication étant approuvée par le ministère de l'Éducation de l'époque. Ces manuels contiennent des messages pouvant être analysés selon les procédures de l'analyse de contenu. Tel que spécifié, nous nous concentrons ici sur l'analyse d'un de ces manuels, *Perspective mathématique* (Guay, Hamel et Lemay,

2005a) qui présente un travail intéressant pour la covariation¹⁰. Cette collection est constituée de quatre volumes, deux pour chaque année du cycle. Le tableau 1 présente les différentes parties qui ont été identifiées comme pouvant être porteuses pour un travail sur la covariation, elles reposent sur le repérage de concepts au premier cycle du secondaire reliées à la fonction (Section 2). Il s'agit des chapitres portant sur le raisonnement proportionnel, sur l'étude des régularités et sur l'étude des différents registres de représentations (principalement la table de valeurs et le graphique).

Tableau 1

Parties et pages considérées dans la collection Perspective mathématique (Manuel B, Volume 1 et 2).

Titre des parties et dossiers sélectionnés	Pages considérées
Partie 5 : Dossier : Silence, on tourne! <ul style="list-style-type: none"> • Les situations de proportionnalité 	p. 56-63
Partie 6 : Dossier : Sports spectaculaires <ul style="list-style-type: none"> • Les représentations graphiques • Banque de situations-problèmes 	p. 128-155 p. 169
Partie 8 : Dossier : Surprenante nature <ul style="list-style-type: none"> • La représentation graphique d'une situation • Régularité et représentation 	p. 413-422 p. 423-431

Les trois parties considérées dans notre étude sont dans les deux volumes qui correspondent à la deuxième année du premier cycle du secondaire (élèves de 13-14 ans). Chacune des parties est composée d'un ou de deux dossiers qui débutent par une phase de préparation des apprentissages contenant la page titre du dossier et une situation de préparation. Par la suite est présentée la phase de réalisation des apprentissages. Cette dernière est composée de trois *Situations-problèmes* puis d'une situation de *Réalisation Personnelle* et parfois d'*Une page d'histoire*. Les pages suivantes regroupent la section *Activité* qui propose un contexte d'introduction afin de présenter le nouveau contenu : « *les séquences d'activités [...] te feront découvrir les concepts et les processus liés aux situations-problèmes du dossier* » (Guay, et al., 2005a, p. IX). Cette section est suivie d'*Exercices* d'application qui, comme le nom l'indique, est utilisée pour l'application du nouveau concept provenant de l'activité ou des activités précédentes. À la suite des *Exercices d'application* est présentée une section *Situations d'application* qui représente la plus grande partie des problèmes des différents chapitres. Après ces trois sections, les auteurs ajoutent une nouvelle section *Activité* pour passer au concept suivant jusqu'à la fin du dossier. Avant de terminer les dossiers, une banque de situations-problèmes permet de revenir sur les notions du dossier. Dans ces parties, nous avons relevé les situations qui présentent un potentiel pour le développement d'un regard covariationnel. Cette sélection s'est faite à partir de différentes questions (Section 2.1). Par la suite, les situations retenues ont été analysées selon les variables didactiques. *Perspective mathématique* s'illustre par la présence

¹⁰ Les deux autres collections analysées sont À vos maths! (Coupal, 2005) et Panoramath (Cadieux et al. (2005).

significative de cinq variables didactiques discutées à la section 2.2, elles caractérisent le travail qui sera mené autour de la covariation dans ce manuel.

4. Résultats

Le tableau 2 présente l'emplacement des vingt-quatre situations à caractère covariationnel retenues dans les trois parties du manuel.

Tableau 2

Nombre de situations considérées et celles retenues dans trois parties de Perspective mathématique

Titre du chapitre (Partie)	Nombre de situations retenues	Nombre total de situations considérées	Fréquence (% , arrondi à l'entier)
Partie 5 : Dossier : Silence, on tourne! Les situations de proportionnalité	1	20	5
Partie 6 : Dossier Sports spectaculaires Les représentations graphiques	17	25	68
Partie 8 : Dossier Surprenante nature La représentation graphique d'une situation et Régularité et représentation	6	32	19
Total	24	77	31

Le plus grand nombre de situations à caractère covariationnel, dix-sept, sont dans la partie 6, plus précisément dans la sous-partie « graphique ». Cette dernière regroupe des situations qui présentent des tracés que l'élève doit interpréter et la production de tracés (modélisation) sans utiliser de valeurs numériques. Les auteurs précisent comme suit leurs intentions : « La présente séquence vise à développer chez les élèves la capacité à représenter globalement des situations à l'aide d'un graphique et à interpréter de tels graphiques dans un contexte donné » (Guay, Hamel et Lemay, 2005b, p. 147A). Ainsi, dans ces situations, afin de bien saisir les tracés, il est primordial de considérer les deux grandeurs qui varient conjointement. Quant à la situation retenue de la partie 5, elle se situe au début du chapitre sur les situations de proportionnalité. Les autres situations de cette partie se concentrent essentiellement sur la complétion de tables de valeurs, mais pas nécessairement dans une approche covariationnelle, l'objectif étant de trouver le « facteur multiplicatif » entre deux valeurs d'un couple d'une situation proportionnelle. Pour ce qui est de la partie 8, cinq des six situations retenues sont dans les dernières pages du chapitre (p. 420 à 431). Cette partie est la dernière du cycle et l'on y retrouve quelques situations qui reviennent sur les notions des parties précédentes entre autres les parties 5 et 6.

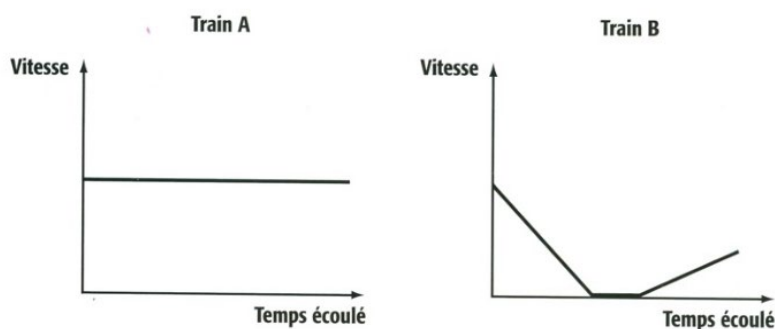
Chacune des vingt-quatre situations retenues cible un minimum de 2 VD. Treize des vingt-quatre situations sans valeurs numériques (VD2) se trouvent dans la partie 6 du manuel. Douze parmi ces treize situations portent sur le registre Représentation graphique (huit s'appuient sur une représentation graphique et 6 demandent d'en produire une). Pour dix de ces treize situations, les deux grandeurs observées sont une distance parcourue, une vitesse ou une autre mesure avec le temps écoulé comme

grandeur prédominante. Ainsi, plusieurs questions amènent un travail d'interprétation d'une représentation graphique vers une description en mots qui repose sur un temps chronologique. Nous présentons dans ce qui suit deux situations qui illustrent le travail mené par *Perspective mathématique* pour le développement du raisonnement covariationnel. Dans la situation des trains (Figure 4), l'absence de valeurs numériques force une interprétation qualitative des accroissements de temps afin d'observer les accroissements de la vitesse des trains.

Figure 4

Situation d'application : Les trains

- 13 Les deux graphiques ci-dessous représentent la vitesse de deux trains selon le temps écoulé.



À l'aide de deux autres graphiques, représente globalement la distance parcourue par ces deux trains selon le temps écoulé.



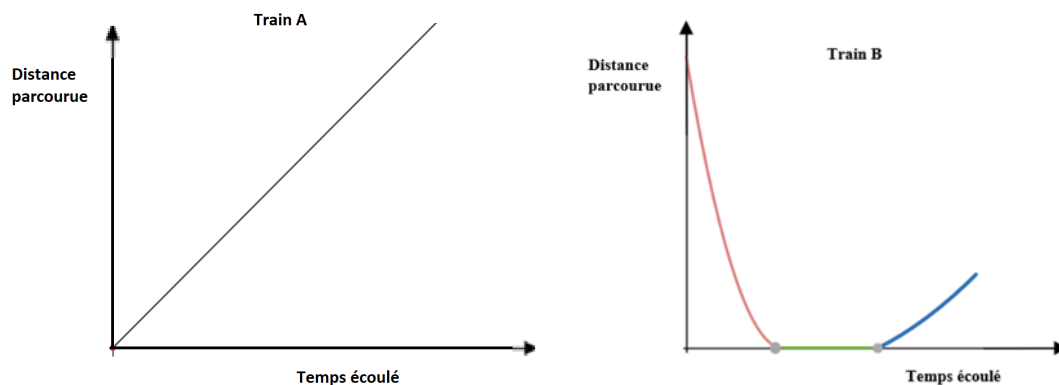
Source. Guay et al. (2005a, p. 155).

Ainsi, pour le train A, en observant que pour des accroissements d'un certain intervalle de temps écoulé, la vitesse ne change pas, nous pouvons dire que pour des accroissements de temps constants, les accroissements de distance parcourue seront constants, ce qui permet de tracer le graphique de la distance parcourue selon le temps écoulé (Figure 5). Pour le train B, l'interprétation n'est pas aussi si simple (Figure 5). Pour des accroissements constants de temps écoulé dans la première phase, la vitesse diminue selon des accroissements constants. Cela veut dire que le train freine en réduisant sa vitesse constamment pour des intervalles constants de temps. Ainsi, la relation entre la distance parcourue et le temps écoulé peut s'exprimer comme suit : plus le temps écoulé augmente, plus la distance parcourue diminue. On obtient alors un tracé courbe ouvert vers le bas. La phase suivante où la vitesse est nulle et constante, le tracé sera droit horizontal, ce qui traduit que le train est arrêté. La dernière phase est

l'inverse de la phase de décélération (phase 1), le train reprend de la vitesse à un rythme constant. Ainsi, plus le temps écoulé augmente, plus la distance parcourue augmentera. Le tracé bleu exprime l'accroissement de plus en plus grand de la distance (courbe ouverte vers le haut, figure 5, train B).

Figure 5


Tracés de la relation entre la distance parcourue selon le temps écoulé des trains A et B



De plus, dans cette situation, les élèves sont en présence de trois grandeurs explicites : la vitesse, le temps écoulé et la distance parcourue (VD1). Toutefois, ces trois grandeurs ne sont pas indépendantes, la vitesse étant définie comme un taux entre la distance et le temps. Ce phénomène arrive souvent quand les situations mobilisent la grandeur *Temps* comme temps écoulé. Nous avons observé que pour toutes les situations sans valeurs numériques qui impliquent le temps, la relation entre les grandeurs est imposée avec le temps comme grandeur prédominante. Ce n'est pas étonnant puisque dans l'observation de phénomènes physiques (comme le déplacement d'un train ou le mouvement d'une pendule), la grandeur prédominante intuitive est le temps. Une autre situation a retenu notre attention, car le temps est considéré comme la grandeur conséquente (VD7) dans la deuxième partie de l'expérience du mouvement d'un pendule (Figure 6). Cette situation est la seule répertoriée avec cette variable didactique. Cette situation est composée de deux expériences où les élèves observent : le nombre de battements d'un pendule, le temps et la longueur de la corde. Les élèves sont en présence de trois grandeurs qu'on peut considérer comme indépendantes si on les compare aux grandeurs de la situation précédente. Cette situation est intéressante, car elle amène une réflexion à propos de deux tables de valeurs différentes obtenues à la suite d'expérimentations similaires. L'expérience 1 considère le nombre de battements selon le temps écoulé (la longueur de la corde est fixée) et l'expérience 2 étudie le temps écoulé selon différentes longueurs de cordes (le nombre de battements est fixé).

Figure 6

Activité : Les pendules



Matériel nécessaire :
Ficelle, poids (pince-notes, clé, etc.), règle graduée et chronomètre.

Souviens-toi, un **taux** est une comparaison de deux quantités de nature différente. Par exemple, la vitesse en km/h est un taux.

Activité 1 Les pendules

Fais équipe avec un ou une camarade. Ensemble, effectuez l'une des deux expériences ci-dessous. Assurez-vous de bien comprendre l'expérience à réaliser et respectez les consignes suivantes.

- Sur la feuille qu'on vous remet, il manque des données dans la table de valeurs. Déterminez-en deux en réalisant l'expérience.
- Pour chacune des autres données manquantes, faites d'abord une prédiction, puis validez-la en réalisant l'expérience.

Expérience 1
Prévoir le nombre de battements d'un pendule dont la corde a une longueur de 30 cm selon différents temps.

Expérience 2
Prévoir le temps que met un pendule pour effectuer 20 battements selon différentes longueurs de corde.

Votre expérience correspond-elle à une situation de proportionnalité ? Si oui, répondez aux deux questions ci-dessous. Sinon, expliquez pourquoi.

- Exprimez par un **taux** le lien entre les deux quantités mises en relation.
- Par quel facteur faut-il multiplier le nombre d'unités de l'une des quantités pour obtenir le nombre d'unités de la quantité correspondante ?

Source. Guay et al. (2005a, p. 56).

Perspective mathématique propose treize situations qui considèrent explicitement plus de deux grandeurs comme c'est le cas dans l'expérience des pendules. Dans la première expérience des pendules, la grandeur « temps » est observée de façon chronique comme le déroulement d'une histoire puis le temps prend l'interprétation d'une durée dans la deuxième expérience. Ainsi les grandeurs sont interchangeables (VD9) comme c'est le cas dans huit autres situations de ce manuel. Cependant, ces grandeurs sont majoritairement prédéterminées comme c'est le cas dans les deux situations exemplifiées ici (Figures 4 et 6). La situation des rectangles (Figure 7) illustre des grandeurs qui sont interchangeables et non imposées.

Figure 7

Situation d'application : Les rectangles

- 6** Sur du papier quadrillé, trace différents rectangles ayant un périmètre de 20 unités.
- a)** À l'aide d'une table de valeurs et d'un graphique, représente la relation entre la mesure de la base et la hauteur de ces rectangles.

Source. Guay *et al.* (2005a, p. 56).

L'élève peut choisir la mesure de la base comme grandeur prédominante ou conséquente. Ainsi, en utilisant une formulation qui exclue le mot « selon », les auteurs ne déterminent pas la grandeur qui est prédominante. Un élève pourrait faire varier la mesure de la base ou la mesure de la hauteur. De plus, dans cette situation, le nombre d'unités imposées pour le périmètre agit comme paramètre. Cette troisième grandeur est explicitement présente (VD1), mais elle n'est pas utilisée pour observer une nouvelle relation entre deux grandeurs en fixant la hauteur par exemple comme c'est le cas pour la situation des pendules. En résumé, nous avons répertorié huit situations pour lesquelles la description verbale n'indique pas à l'élève le sens de la relation (VD8), mais seulement trois situations (comme la précédente) qui permettent naturellement de prendre les deux grandeurs comme prédominantes (VD9). Les grandeurs qui sont facilement interchangeables sont, par exemple : le niveau et la quantité d'eau dans une bouteille, la base et la hauteur d'une figure géométrique (triangle, rectangle, carré, octogone) et des suites de figures géométriques avec une régularité.

5. Discussion

Le manuel *Perspective mathématique* propose une diversité de situations présentant du potentiel pour développer le raisonnement covariationnel : 3 situations-problèmes, 7 activités, 3 exercices d'application et 11 problèmes d'application ainsi nommées par les auteurs du manuel. Le travail se concentre essentiellement dans la partie 6 qui présente des situations qui requièrent un raisonnement qualitatif vu l'absence de valeurs numériques pour les grandeurs, l'élève est alors porté à discuter sur les accroissements. Toutefois ces situations s'appuient majoritairement sur le temps chronologique comme grandeur prédominante, ce qui peut représenter un obstacle, les élèves pouvant avoir des difficultés à interpréter le temps comme durée, ce qui est fréquent dans des phénomènes étudiés en sciences. Le travail mené dans l'activité des pendules est intéressant en ce sens. De plus, les auteurs de ce manuel ont le souci de présenter des contextes qui impliquent plus de deux grandeurs, ce qui amène une discussion sur la notion de *paramètre* importante dans l'étude des fonctions. Dans plusieurs cas, la relation entre les grandeurs n'est pas déterminée et les grandeurs sont interchangeables, ce qui pousse les élèves à exprimer la relation entre les deux grandeurs. Un travail intéressant autour de la covariation est alors possible misant sur différentes interprétations s'appuyant tantôt sur une grandeur tantôt sur une autre. Bien que plusieurs situations soient déjà intéressantes pour développer le raisonnement covariationnel, des changements dans les questions proposées pourraient aller plus loin dans l'étude de ce raisonnement.

Nous rejoignons les propos de Janvier et Pelletier (2003) qui précisent que : « Pour remédier à cette lacune [ne pas comprendre l'utilité du paramètre], nous prenons donc l'habitude de s'interroger, au début de chaque situation, sur les grandeurs qui sont présentes dans la situation, que nous les considérons ou pas » (p. 7). On ouvre ainsi la possibilité à ce que les élèves observent plus d'une relation, certaines d'entre elles n'étant pas fonctionnelles. Il est donc préférable de ne pas prédéterminer la relation entre les grandeurs et de questionner les élèves sur cet aspect. Les enseignants, conscients de ces différentes variables didactiques, peuvent modifier les situations pour favoriser le déploiement chez leurs élèves d'un raisonnement covariationnel vu comme un travail préalable au concept de fonction.

Références

- Antoun, Z. (2012). *Analyse des situations d'apprentissage dans le cadre de la résolution de problèmes en algèbre (premier cycle) dans une collection du secondaire* [mémoire de maîtrise]. Université du Québec à Montréal, Montréal, Canada.
- Assude, T. et Margolinas, C. (2005). Aperçu sur les rôles des manuels dans la recherche en didactique des mathématiques. Dans E. Bruillard (dir.), *Manuels scolaires, regards croisés* (p. 231-241). Caen, France : CRDP Basse-Normandie.
- Barallobres, G. (2009). Caractéristiques des pratiques algébriques dans les manuels scolaires québécois. *Petit x*, 80, 55-76.
- Bardin, L. (2013). *L'analyse de contenu*. Paris : Presses Universitaires de France.
- Brousseau G. (2003). Sur l'introduction de calcul littéral. *Bulletin de l'APMEP*, 445, 197-213.
- Cadioux, R., Gendron, I, Ledoux, A. (2005). *Panoramath. Manuel, B, volumes 1 et 2. 1^{er} cycle du secondaire*. Québec : Éditions CEC.
- Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. Dans A. H. Schoenfeld, J. Kaput et E. Dubinsky (dir.), *CBMS. Issues in Mathematics Education. Research in Collegiate Mathematics Education III* (vol. 7, p. 114-162). Washington, DC : Mathematical Association of America.
- Carlson, M., Larsen, S. et Jacobs, S. (2001). An investigation of covariational reasoning and its role in learning the concepts of limit and accumulation. Dans *Proceedings of the 23rd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, p. 145-153). Snowbird, UT : PME-NA.
- Carlson, M. (2002). Physical enactment : A powerful representational tool for understanding the nature of covarying relationships? Dans *Representations and Mathematics Visualization*. North American Chapter of IGPME et Cinvestav-IPN.
- Confrey, J. et Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1) 66-86.

- Coupal, M. (2005). *À vos maths! Manuel de l'élève C. 1^{er} cycle du secondaire*. Montréal : Graficor, Chenelière éducation.
- Dufour, S. (2011). *L'utilisation des représentations par deux enseignantes du collégial pour l'introduction de la dérivée* [mémoire de maîtrise]. Université du Québec à Montréal, Montréal, Canada.
- Ellis, A. B. (2007). The influence of reasoning with emergent quantities on students' generalizations. *Cognition and Instruction*, 25(4), 439-478.
- Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise : enseignement secondaire, deuxième cycle*. Ministère de l'Éducation.
- Guay, S., Hamel, J.-C. et Lemay, S. (2005a). *Perspective mathématique. Manuel de l'élève, B, volume 1 et 2. 1^{er} cycle du secondaire*. Laval : Éditions Grand Duc - HRW.
- Guay, S., Hamel, J.-C. et Lemay, S. (2005b). *Perspective mathématique. Guide d'enseignement B. 1^{er} cycle du secondaire*. Laval : Éditions Grand Duc - HRW.
- Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 8(1), 255-271.
- Hitt, F., Gonzalez, A. et Morasse, C. (2008). Visualization and students' functional representations in the construction of mathematical concepts. An example : The concept of co-variation as a prelude to the concept of function. Dans *ICME-11, Topic Study Group 20 (TSG 20), Visualization in the Teaching and Learning of Mathematics*. Monterrey : ICME.
- Janvier, C. (1981). Les graphiques cartésiens dans l'enseignement des sciences. *Spectre*, 35-42.
- Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 79-103.
- Janvier, B. et Pelletier, F. (2003). Didactique de la variable et des fonctions. MAT3225. Récupéré de http://www.hitt.uqam.ca/mat3225_fich/MAT3225_Janvier-Pelletier.pdf
- Landry, M.-C. (2016). *Analyse de l'introduction de la notion de vecteur dans des manuels québécois de mathématique et de physique de 5^e secondaire* [mémoire de maîtrise]. Université du Québec à Rimouski, Rimouski, Québec.
- Passaro, V. (2007). *Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélées par une analyse des représentations spontanées d'élèves du premier cycle du secondaire* [mémoire de maîtrise]. Université du Québec à Montréal, Montréal, Canada.
- Passaro, V. (2015). *Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans* [thèse de doctorat]. Université du Québec à Montréal, Montréal, Canada.
- René De Cotret, S. (1988). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x*, 17, 5-27.

- Robert, V. (2018). *Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3e cycle du primaire québécois : une analyse praxéologique* [mémoire de maîtrise]. Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec.
- Saboya, M. (2003). *Analyse d'une intervention sur les graphiques auprès d'une élève classée en difficultés d'apprentissage en mathématiques au secondaire* [mémoire de maîtrise]. Université du Québec à Montréal, Montréal, Québec.
- Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function-A case study. *Educational Studies in Mathematics*, 53(3), 229-254.
- Saldanha, L. A. et Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective : Simultaneous continuous variation. Dans S. B. Berenson et W. N. Coulombe (dir.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America* (vol. 1, p. 298-306). Raleigh, NC : North Carolina State University.
- Selden, A. et Selden, J. (1992). Research perspectives on conceptions of function : Summary and overview. Dans G. Harel et E. Dubinsky (dir.), *The Concept of Function : Aspects of Epistemology and Pedagogy* (p. 1-16). Washington, DC : Mathematical Association of America.
- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. Dans G. Harel et E. Dubinsky (dir.), *The Concept of Function : Aspects of Epistemology and Pedagogy* (p. 23-58). Washington, DC : Mathematical Association of America.
- Soury-Lavergne, S. et Bessot, A. (2012). Modélisation de phénomènes variables à l'aide de la géométrie dynamique. Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT5, p. 742-753).
- Thompson, P. W. et Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions : Foundational ways of thinking mathematically. Dans J. Cai (dir.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (p. 421-456). Reston, VA : NTCM.
- van den Heuvel-Panhuizen, M., Kolovou, A. et Robitzsch, A. (2013). Primary school students' strategies in early algebra problem solving supported by an online game. *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 281-307.